ANTON BĂTĂTORESCU

METODE DE OPTIMIZARE LINIARĂ

Editura Universității din București

ANTON BĂTĂTORESCU

METODE DE OPTIMIZARE LINIARĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREŞTI
2003

560103

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. **Vasile Preda**
Prof. dr. **Monica Dumitrescu**

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
BĂTĂTORESCU, ANTON
Metode de optimizare liniară/ Anton Bătătorescu -
Bucureşti: Editura Universităţii din Bucureşti, 2003
Bibliografie
ISBN 973-575-720-6

519.863

Prefaţă

De la primele publicaţii ale lui Dantzig cu privire la algoritmul simplex a trecut aproximativ o jumătate de secol. În acest interval de timp, teoria şi metodele de optimizare liniară au cunoscut o evoluţie considerabilă, în prezent existând un număr impresionant de lucrări consacrate acestui domeniu.

În aceeaşi perioadă a avut loc şi apariţia, iar apoi "explozia" calculatoarelor electronice, care au permis implementarea algoritmilor în programe performante, capabile să rezolve probleme economice reale. Dimensiunea din ce în ce mai mare a acestor probleme a impus rafinarea şi adaptarea variantei iniţiale a algoritmului simplex pentru a face faţă dificultăţilor ce se întâmpină la prelucrarea volumului mare de date. O direcţie în acest sens a constat în elaborarea unor metode de gestionare judicioasă a elementelor nenule pe parcursul iteraţiilor, numite *metode compacte*, însă ele nu vor face obiectul de studiu al acestei cărţi. O altă direcţie a fost de a găsi principii noi de abordare a rezolvării problemelor, fie prin exploatarea structurii speciale în care se prezintă de regulă datele în astfel de cazuri, fie prin adaptarea unor metode de optimizare neliniară.

Scopul acestei cărţi este de a prezenta anumite aspecte din vasta problematică a optimizărilor liniare, punându-se accentul asupra rezultatelor teoretice, care justifică metodele şi algoritmii ce sunt utilizaţi în practică.

Primul capitol este destinat teoremelor clasice ale programării liniare. Pe baza acestora este enunţat algoritmul simplex primal şi apoi, după expunerea rezultatelor de dualitate, algoritmul simplex dual.

De asemenea, pentru a face o deschidere spre implementarea practică a algoritmului simplex, sunt deduse formulele de schimbare a bazei prin intermediul Lemei substituţiei şi se prezintă două modalităţi de organizare a calculelor: tabloul simplex standard şi cel revizuit. Pe de altă parte, într-un paragraf separat, este prezentată adaptarea algoritmului simplex pentru rezolvarea mai eficientă, din punct de vedere a dimensiunii, a problemelor cu variabile mărginite.

Cel de-al doilea capitol prezintă câteva metode de optimizare liniară care sunt concepute pentru rezolvarea problemelor de dimensiuni mari. Astfel de probleme au în mod necesar o structură particulară a restricţiilor, în care coeficienţii nenuli sunt grupaţi de regulă în blocuri (submatrice). Structura care rezultă este de formă "bloc-unghiulară" sau "bloc-triunghiulară". Metodele prezentate aici exploatează într-un mod ingenios acestă structură astfel încât, în loc de a rezolva o singură problemă de programare liniară, care este de dimensiune foarte mare, se rezolvă un şir de probleme liniare, dar care sunt de dimensiuni cu mult mai mici. Pentru aceasta sunt folosite două principii de abordare. Primul este principiul de descompunerele Dantzig-Wolfe, iar al doilea, cel de relaxare şi partiţionare. Ceea ce trebuie subliniat este faptul că aceste metode se bazează în ultimă instanţă tot pe teoremele algoritmului simlex, care prin intermediul acestor principii este adaptat să beneficieze de structura "în blocuri" a datelor problemei. Cele două exemple numerice ilustrează modul de aplicare a metodelor expuse în acest capitol.

În ultimele două decenii, după publicarea în 1984 a algoritmului lui Karmarkar, studiul rezolvării problemelor de programare liniară de dimensiuni mari s-a orientat spre investigarea unor metode alternative. Ultimul capitol este consacrat prezentării unor astfel de metode, care îşi au originea în metodele de optimizare neliniară şi se bazează pe construirea unor şiruri de puncte recurente din interiorul, respectiv exteriorul domeniului de admisibilitate. Aceste metode au o caracteristică comună şi anume, ele rezolvă problemele "în timp polinomial", adică, efortul de calcul este mărginit de valoarea unui polinom ce se calculează în raport cu "mărimea" problemei. În cazul algoritmilor de punct interior, şirul de puncte recurente se află în vecinătatea unei "traiectorii continue", care este descris de un sistem de ecuaţii diferenţiale.

Cartea se adresează în special studenţilor care urmează cursuri de optimizare matematică, dar ea poate fi utilă în egală măsură şi tuturor acelora care sunt confruntaţi în activitatea practică cu rezolvarea unor probleme de optimizare liniară, deoarece, prin aprofundarea teoretică a acestor metode, se pot înţelege şi interpreta mai bine rezultatele ce se obţin prin utilizarea diferitor programe software.

Bucureşti, decembrie 2002. Autorul

CUPRINS

Capitolul 1

Programare liniară

1.1. Notaţii şi proprietăţi ale sistemelor liniare

Vom nota cu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ o matrice cu m linii şi n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, sunt elementele ei. Vom spune că matricea A este de dimensiune $m \times n$.

Transpusa matrecei A o vom nota cu $A^\top$ şi este matricea:

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Evident, $A^\top$ este de dimensiune $n \times m$.

Dacă $m = n$, atunci $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte matrice pătratică de ordinul n.

Pe mulţimea matricelor de aceeaşi dimensiune se defineşte operaţia de adunare astfel: pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, avem:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Înmulţirea unei matrice $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ este:

$$\alpha B = (\alpha b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = B\alpha$$

În raport cu aceste operaţii, mulţimea matricelor de aceeaşi dimensiune formează un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale.

Dacă $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ şi $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, atunci se poate defini produsul

$$A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

unde elementele matricei produs C se calculează astfel:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}\,,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Determinantul unei matrice pătratice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este numărul

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

unde $\mathcal{S}_n$ este mulţimea permutărilor σ de ordinul n, iar $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ.

Dacă $\det A \neq 0$, matricea A se numeşte nesingulară, iar în acest caz, există o unică matrice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, numită "matrice inversă", cu proprietatea:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{I}_n$$

unde $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea unitate de dimensiune $n \times n$:

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă în matricea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ alegem k linii: $i_1, i_2, ..., i_k$ şi k coloane: $j_1, j_2, ..., j_k$, elementele care se găsesc la intersecţia acestor linii şi coloane formează o matrice pătratică de ordinul k:

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

Determinantul $\det M$ este un "minor de ordin k" al matricei A.

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ are "rangul r", şi scriem $rang\,(A) = r$, dacă A are un minor nenul de ordin r, iar toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Evident, $rang\,(A) \leq \min\{m, n\}$.

Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ este considerat ca fiind o matrice $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, adică, având n linii şi o coloană. Din această cauză spunem că $v \in \mathbb{R}^n$ este un **vector coloană**, iar în reprezentarea sa pe componente vom omite scrierea indicelui de coloană:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^\top$$

În mod similar, vectorul transpus $v^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$, se va numi **vector linie**.

Produsul scalar a doi vectori $x \in \mathbb{R}^n$ şi $y \in \mathbb{R}^n$ este:

$$x^\top \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^\top \cdot x$$

Pe mulţimea vectorilor de aceeaşi dimensiune vom defini următoarele relaţii: dacă $x \in \mathbb{R}^n$ şi $y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$\begin{aligned} x &= y \iff x_i = y_i \text{ pentru orice } i = \overline{1,n}; \\ x &\leq y \iff x_i \leq y_i \text{ pentru orice } i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

(Notaţia $i = \overline{1,n}$ este echivalentă cu $i \in \{1, 2, ..., n\}$.)
În particular, $x \geq \mathbf{0}$ înseamnă $x_i \geq 0$ pentru orice $i = \overline{1,n}$, iar "$\mathbf{0}$" este vectorul cu toate componentele zero (vectorul nul), de aceeaşi dimensiune ca x.

Fiind dată o matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi un vector $b \in \mathbb{R}^m$, putem considera următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$A \cdot x = b \tag{1.1.1}$$

unde variabila vectorială $x \in \mathbb{R}^n$ are drept componente necunoscutele x_i, $i = \overline{1,n}$, ale sistemului. Vom nota:

$$\begin{aligned} A_i &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad \text{linia "}i\text{" a matricei } A; \\ A^j &= (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^\top \quad \text{coloana "}j\text{" a matricei } A. \end{aligned}$$

Astfel, sistemul de ecuaţii (1.1.1) poate fi rescris în următoarele forme echivalente:

$$A_i \cdot x = b_i \ , \quad i = \overline{1,m}$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b.$$

Sistemul de ecuaţii (1.1.1) are soluţii dacă şi numai dacă $rang\,(A) = rang\left(A \,\vdots\, b\right)$ (teorema Kronecker-Capelli).

Fie $rang\,(A) = rang\left(A \,\vdots\, b\right) = r$. Vom numi **ecuaţii principale**, respectiv **variabile principale**, acelea ale căror coeficienţi intră în compunerea unui minor de ordin r nenul; celelalte vor fi numite **ecuaţii secundare**, respectiv **variabile secundare**.

Deoarece orice vector $x \in \mathbb{R}^n$, care satisface sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile principale, satisface şi ecuaţiile secundare, acestea din urmă pot fi omise fără a influenţa natura sistemului iniţial. Din această cauză, în cele ce urmează, vom considera că ecuaţiile secundare sunt eliminate din sistemul (1.1.1) şi deci avem

$$rang\,(A) = m \leq n.$$

Dacă $m = n$, sistemul (1.1.1) are o soluţie unică $x = A^{-1} \cdot b$, iar dacă $m < n$, atunci el are o infinitate de soluţii.

Deoarece $rang\,(A) = m$, există m coloane liniar independente $A^{s_1}, A^{s_2}, ..., A^{s_m}$ ale matricei A. Aceste coloane formează o bază în spaţiul liniar generat de coloanele lui A. Din această cauză, matricea pătratică de ordin m, formată cu aceste coloane, o vom nota

$$B = (A^{s_1} A^{s_2} ... A^{s_m})$$

şi o vom numi **matrice de bază**. Matricea formată din coloanele lui A, care nu fac parte din B, va fi notată cu R. Astfel, coloanele matricei A pot fi partiţionate în două şi vom scrie:

$$A = \left(B \,\vdots\, R\right).$$

Vom nota mulţimea de indici corespunzătoare coloanelor lui B cu

$$\mathcal{B} = \{s_1, s_2, ..., s_m\},$$

iar mulţimea de indici corespunzătoare coloanelor lui R cu

$$\mathcal{R} = \{1, 2, ..., m\} \setminus \mathcal{B}.$$

În concordanţă cu partiţionarea coloanelor lui A, componentele variabilei vectoriale $x \in \mathbb{R}^n$ a sistemului de ecuaţii (1.1.1) se partiţionează în mod corespunzător:

$$x = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

unde $x_{\mathcal{B}} = (x_i)_{i \in \mathcal{B}} = (x_{s_1}, x_{s_2}, ..., x_{s_m})^{\top} \in \mathbb{R}^m$ conţine variabilele principale ale sistemului, numite şi **variabile de bază**, iar $x_{\mathcal{R}} = (x_j)_{j \in \mathcal{R}} \in \mathbb{R}^{n-m}$ conţine variabilele secundare.

Utilizând notaţiile introduse mai sus, sistemul de ecuaţii (1.1.1) poate fi rescris în modul următor

$$B \cdot x_{\mathcal{B}} + R \cdot x_{\mathcal{R}} = b$$

de unde se obţine expresia soluţiei generale:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot x_{\mathcal{R}} \tag{1.1.2}$$

Vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **soluţie** a sistemului (1.1.1) dacă verifică $A \cdot v = b$. O soluţie a sistemului (1.1.1) este numită **soluţie de bază**, dacă componentele ei diferite de zero corespund unor coloane liniar independnte ale lui A. Deoarece $rang\,(A) = m$, cel mult m componente ale unei soluţii de bază pot fi nenule. Dacă soluţia de bază are exact m componente nenule, ea se numeşte **nedegenerată**; în caz contrar ea este **degenerată**.

Pentru orice bază B, din relaţia (1.1.2) se poate obţine o soluţie de bază a sistemului (1.1.1) astfel: se anulează variabilele secundare $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$, iar variabilele principale primesc valoarea $x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b$. Evident, vectorul $v = \begin{pmatrix} [B^{-1} \cdot b]_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ este o soluţie de bază, deoarece verifică $A \cdot v = b$, iar componentele sale nenule corespund coloanelor lui B, care sunt liniar independente.

1.1.1. Lema Farkas-Minkowski

Să considerăm următoarele sisteme liniare:

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

şi

$$\begin{cases} A^\top \cdot u \geq \mathbf{0} \\ b^\top \cdot u < 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ iar $b \in \mathbb{R}^m$.

Lema 1.1 (Farkas-Minkowski) *Dintre sistemele (1.1.3) şi (1.1.4), doar unul, şi numai unul poate avea soluţii.*

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că cele două sisteme nu pot avea simultan soluţii. Dacă presupunem prin absurd că sistemul (1.1.3) are soluţia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ iar sistemul (1.1.4) are soluţia $u_0 \in \mathbb{R}^m$, atunci avem $x_0 \geq \mathbf{0}$ şi $A^\top \cdot u_0 \geq \mathbf{0}$. De aici rezultă

$$u_0^\top \cdot b = u_0^\top \cdot A \cdot x_0 \geq 0$$

ceea ce contrazice relaţia a doua a sistemului (1.1.4).

Prin urmare, dacă sistemul (1.1.3) are o soluţie, atunci sistemul (1.1.4) nu poate avea soluţie.

Rămâne să arătăm că, dacă sistemul (1.1.3) nu are soluţie, atunci sistemul (1.1.4) are o soluţie. Două cazuri sunt posibile.

Cazul 1. Sistemul de ecuaţii $A \cdot x = b$ este incompatibil. Asta înseamnă că, dacă $rang\,(A) = r$, atunci $rang \begin{pmatrix} A \vdots b \end{pmatrix} = r + 1$. Să considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} A^\top \cdot u &= \mathbf{0} \\ b^\top \cdot u &= c \end{aligned}$$

unde constanta $c < 0$. Se constată cu uşurinţă că acest sistem este compatibil:

$$rang \begin{pmatrix} A^\top \\ b^\top \end{pmatrix} = r + 1 = rang \begin{pmatrix} A^\top & \mathbf{0} \\ b^\top & c \end{pmatrix}$$

şi prin urmare, soluţia acestuia este o soluţie pentru (1.1.4).

Cazul 2. Sistemul de ecuaţii $A \cdot x = b$ este compatibil, dar **nu** admite o soluţie $x \geq \mathbf{0}$. Pentru a construi o soluţie a sistemului (1.1.4), vom folosi un raţionament prin inducţie, după numărul coloanelor lui $A = (A^1, A^2, ..., A^n)$.

Dacă matricea este formată dintr-o singură coloană A^1, atunci, în această situaţie trebuie ca $b \neq \mathbf{0}$ şi există $x_1 < 0$ astfel încât $A^1 x_1 = b$. Se verifică cu uşurinţă că vectorul $u = -b$ este o soluţie a lui (1.1.4):

$$\begin{aligned} u^\top \cdot A^1 &= (-b)^\top \cdot \left(\frac{1}{x_1} b\right) = \frac{-1}{x_1} \|b\|^2 > 0 \\ u^\top \cdot b &= (-b)^\top \cdot b = -\|b\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Fie $k \geq 1$ şi presupunem că, dacă sistemul

$$\sum_{i=1}^{k} A^i x_i = b \text{ nu admite soluţie } x_i \geq 0,\ i = \overline{1,k}, \tag{1.1.5}$$

atunci există un vector $u_0 \in \mathbb{R}^m$, astfel încât

$$\begin{aligned} u_0^\top \cdot A^i &\geq 0, \quad i = \overline{1,k}, \\ u_0^\top \cdot b &< 0. \end{aligned}$$

Pentru cazul când A are $k+1$ coloane, dacă $u_0^\top \cdot A^{k+1} \geq 0$, atunci vectorul u_0 este o soluţie a lui (1.1.4) şi problema este rezolvată. Vom presupune deci

$$u_0^\top \cdot A^{k+1} < 0$$

şi vom construi un vector $\tilde{u}$ care să verifice sistemul (1.1.4).

Definim următorii vectori:

$$\bar{A}^i = A^i + \lambda_i A^{k+1} \quad \text{unde} \quad \lambda_i = -\frac{u_0^\top \cdot A^i}{u_0^\top \cdot A^{k+1}} \geq 0,\ i = \overline{1,k}, \tag{1.1.6}$$

$$\bar{b} = b + \lambda_0 A^{k+1} \quad \text{unde} \quad \lambda_0 = -\frac{u_0^\top \cdot b}{u_0^\top \cdot A^{k+1}} < 0. \tag{1.1.7}$$

Sistemul $\sum_{i=1}^{k} \bar{A}^i y_i = \bar{b}$ nu admite soluţie $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$. Prin absurd, dacă ar exista o soluţie $\bar{y}_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, atunci, din (1.1.6) şi (1.1.7) putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(A^i+\lambda_i A^{k+1}\right)\bar{y}_i = b+\lambda_0 A^{k+1}$$

sau,

$$\sum_{i=1}^{k} A^i\bar{y}_i + \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{y}_i-\lambda_0\right)A^{k+1}=b$$

Deoarece pentru orice $i=\overline{1,k}$ avem $\lambda_i \geq 0$ şi $\lambda_0 < 0$, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{y}_i - \lambda_0 > 0$, adică sistemul (1.1.3) ar admite o soluţie nenegativă, contrar ipotezei noastre de la care am plecat.

Prin urmare, folosind ipoteza de inducţie (1.1.5) pentru sistemul definit de vectorii $\bar{A}^i$ şi $\bar{b}$, rezultă că există un vector $\bar{u}\in\mathbb{R}^m$, care verifică relaţiile:

$$\begin{aligned}\bar{u}^\top\cdot\bar{A}^i &\geq 0, \quad i=\overline{1,k}, &\quad(1.1.8)\\ \bar{u}^\top\cdot\bar{b} &< 0. &\quad(1.1.9)\end{aligned}$$

Din (1.1.8), pentru fiecare $i=\overline{1,k}$, folosind (1.1.6), avem:

$$\begin{aligned}&0\leq \bar{u}_0^\top\cdot\bar{A}^i=\bar{u}^\top\cdot\left(A^i+\lambda_iA^{k+1}\right)=\\&=\bar{u}^\top\cdot\left(A^i-\frac{u_0^\top\cdot A^i}{u_0^\top\cdot A^{k+1}}A^{k+1}\right)=\left(\bar{u}-\frac{\bar{u}^\top\cdot A^{k+1}}{u_0^\top\cdot A^{k+1}}u_0\right)^\top\cdot A^i\end{aligned} \qquad (1.1.10)$$

Vom defini

$$\tilde{u}=\bar{u}-\frac{\bar{u}^\top\cdot A^{k+1}}{u_0^\top\cdot A^{k+1}}u_0$$

şi din (1.1.10) rezultă

$$\tilde{u}^\top\cdot A^i\geq 0,\ i=\overline{1,k}.$$

În plus, avem:

$$\tilde{u}^\top\cdot A^{k+1}=\left(\bar{u}-\frac{\bar{u}^\top\cdot A^{k+1}}{u_0^\top\cdot A^{k+1}}u_0\right)^\top\cdot A^{k+1}=0.$$

Folosind (1.1.9) şi (1.1.7), obţinem:

$$\tilde{u}^\top\cdot b \;=\; \left(\bar{u}-\frac{\bar{u}^\top\cdot A^{k+1}}{u_0^\top\cdot A^{k+1}}u_0\right)^\top\cdot b=$$

$$= \bar{u}^{\top} \cdot \left(b - \frac{u_0^{\top} \cdot b}{u_0^{\top} \cdot A^{k+1}} A^{k+1}\right) = \bar{u}^{\top} \cdot \bar{b} < 0.$$

Prin urmare, $\tilde{u}$ este o soluţie a sistemului (1.1.4) când A are $k+1$ coloane şi lema este demonstrată. ■

Observaţia 1.1 *Sistemele (1.1.3) şi (1.1.4) pot fi considerate* ***sisteme duale în sens Farkas-Minkowski****.*

Lema Farkas-Minkowski se poate aplica şi la alte perechi de sisteme liniare. Spre exemplu, dacă considerăm sistemul

$$\begin{cases} A \cdot x \le b \\ x \ge \mathbf{0} \end{cases} \tag{1.1.11}$$

acesta este echivalent cu

$$\begin{cases} A \cdot x + \mathbf{I} \cdot y = b \\ x \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

iar acestuia din urmă, având matricea $(A \vdots \mathbf{I})$, îi corespunde următorul sistem dual în sens Farkas-Minkowski:

$$\begin{cases} A^{\top} \cdot u \ge \mathbf{0} \\ u \ge \mathbf{0} \\ b^{\top} \cdot u < 0 \end{cases} \tag{1.1.12}$$

Teorema 1.2 *Fie $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice antisimetrică $\left(S = -S^{\top}\right)$. Sistemul $\begin{cases} S \cdot x \ge \mathbf{0} \\ x \ge \mathbf{0} \end{cases}$ are o soluţie $\bar{x} \ge \mathbf{0}$ cu proprietatea: $S \cdot \bar{x} + \bar{x} > \mathbf{0}$.*

Demonstraţie. Luăm o valoare arbitrară fixată a indicelui i, $1 \le i \le n$. Vom considera perechea de sisteme duale în sens Farkas-Minkowski (1.1.11) şi (1.1.12), în care $A = -S$ şi $b = -e^i$, unde e^i este vectorul unitar cu 1 în poziţia "i" şi zero în rest. Conform lemei Farkas-Minkowski, putem avea doar două situaţii:

Cazul 1. Sistemul (1.1.11) are o soluţie x^i. Prin urmare, putem scrie:

$$\begin{cases} S \cdot x^i \ge e^i \\ x^i \ge \mathbf{0} \end{cases}$$

Dacă notăm cu S_i linia "i" a matricei S, atunci avem: $S_i \cdot x^i \geq 1 > 0$, şi deoarece componenta "i" a soluţiei x^i este $x_i^i \geq 0$, avem

$$S_i \cdot x^i + x_i^i > 0.$$

Cazul 2. Sistemul (1.1.12) are o soluţie x^i. În acest caz, vom avea:

$$\begin{cases} S \cdot x^i \geq \mathbf{0} \\ x^i \geq \mathbf{0} \\ (e^i)^\top \cdot x^i > 0 \end{cases}$$

de unde deducem: $S_i \cdot x^i \geq 0$ şi $x_i^i > 0$, deci şi în acest caz vom avea:

$$S_i \cdot x^i + x_i^i > 0.$$

În concluzie, pentru orice i fixat, există o soluţie $x^i \geq \mathbf{0}$ astfel încât $S_i \cdot x^i + x_i^i > 0$. Dacă luăm acum $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i$, avem evident $\bar{x} \geq \mathbf{0}$ şi $S \cdot \bar{x} + \bar{x} > \mathbf{0}$. ■

1.1.2. Forme ale problemelor de programare liniară

Problemele de programare liniară se pot descrie în diferite forme, în funcţie de condiţiile şi scopul în care sunt folosite. Astfel, dacă ele sunt în faza de modelare matematică a unor probleme reale, atât variabilele cât şi restricţiile vor fi exprimate într-o formă cât mai apropiată de descrierea fenomenului real. Pentru elaborarea unor metode de rezolvare şi a studiului teoretic, problemele de programare liniară se prezintă într-o formă mai simplificată, în care datele problemei, restricţiile şi variabilele îşi pierd semnificaţia iniţială, fiind elemente abstracte, care însă moştenesc structura fenomenului real de la care s-a plecat. În cele ce urmează, vom prezenta cele mai importante forme "matematice" ale acestor probleme.

Trebuie subliniat faptul că, o problemă de optimizare constă din *minimizarea* sau *maximizarea* unei anumite funcţii - numită funcţie obiectiv - în prezenţa unor restricţii care trebuie satisfăcute. Deoarece

$$\inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{P}\} = -\max \{-f(x) \mid x \in \mathcal{P}\},$$

este suficient să studiem doar un singur tip de problemă, care în cazul nostru va fi cea de **minimizare**. Cu ajutorul relaţiei de mai sus, toate rezultatele care se obţin, se pot transpune cu uşurinţă şi pentru problemele de maximizare.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}^n$ şi $\beta \in \mathbb{R}$.

Definiţia 1.1 *Vom spune că o restricţie este* ***concordantă*** *în raport cu o problemă de minimizare, dacă ea este de forma $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$, şi* ***neconcordantă*** *dacă $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$.*
Vom spune că o restricţie este ***concordantă*** *în raport cu o problemă de maximizare, dacă ea este de forma $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$, şi neconcordantă dacă $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$.*

Forma generală.

O problemă de programare liniară în formă generală conţine toate tipurile de restricţii şi variabile care pot apare în descrierea ei. Ea se enunţă astfel:

$$\inf\left\{c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \cdot x_3\right\}$$

în raport cu

$$\begin{cases} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 \geq b_1 \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot x_3 \leq b_3 \\ \qquad x_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad x_3 \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

unde datele problemei sunt matricele $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ şi vectorii $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $c_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.

Necunoscutele problemei sunt grupate în trei variabile vectoriale $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $1 \leq j \leq 3$, astfel încât asupra componentelor lui x_1 şi x_3 sunt impuse condiţii de semn, în timp ce componentele lui x_2 sunt fără condiţii, ele putând primi valori oarecare. De asemenea, observăm că sunt prezente toate formele de restricţii: concordante, de tip egalitate şi neconcordante.

Forma standard.

O problemă de programare liniară în formă standard este:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$$

unde datele problemei sunt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Observăm că în acest caz, toate restricţiile sunt de tip egalitate şi toate componentele necunoscutei x sunt supuse condiţiei de nenegativitate.

Forma canonică.

Forma canonică a unei probleme de programare liniară conţine doar restricţii concordante şi variabile nenegative:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$$

iar datele problemei sunt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Forma mixtă.

O problemă de programare liniară în formă mixtă conţine restricţii concordante şi de tip egalitate, iar variabilele sunt supuse condiţiei de nenegativitate.

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 \cdot x \geq b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{array},\ x \geq \mathbf{0}\right\}$$

Dacă o problemă de programare liniară este prezentată într-o anumită formă, ea poate fi transformată cu uşurinţă în oricare altă formă dorită, folosind următoarele *transformări echivalente*:

- Sensul unei inegalităţi se schimbă prin înmulţire cu -1.
- Transformarea unei inegalităţi într-o ecuaţie: o inegalitate de forma $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$ este echivalentă cu ecuaţia $\alpha^\top \cdot x + y = \beta$ şi $y \geq 0$, unde variabila y se numeşte *variabilă ecart* (sau variabilă de compensare); inegalitatea $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$ este echivalentă cu $\alpha^\top \cdot x - y = \beta$ şi $y \geq 0$.
- Transformarea unei ecuaţii în inegalităţi: o ecuaţie $\alpha^\top \cdot x = \beta$ este echivalentă cu perechea de inegalităţi $\alpha^\top \cdot x \leq \beta$ şi $\alpha^\top \cdot x \geq \beta$.

– O variabilă supusă condiţiei $x \leq 0$ se transformă într-o variabilă nenegativă prin substituţia $x' = -x$.
– O variabilă x care nu este supusă unor condiţii de semn (oarecare), se transformă într-o pereche de variabile nenegative $x^+ \geq 0$ şi $x^- \geq 0$, prin substituţia: $x = x^+ - x^-$.

Din cele de mai sus rezultă că atât studiul teoretic cât şi metodele de rezolvare pot fi abordate utilizând oricare dintre formele problemelor de programare liniară menţionate. Deoarece în teoria sistemelor de ecuaţii liniare dispunem de metode de rezolvare, vom folosi cu precădere forma standard a problemelor de programare liniară pentru a elaborara algoritmi. În schimb, la studiul proprietăţilor de dualitate se va dovedi mai adecvate problemele în forma canonică.

1.1.3. Teorema fundamentală a programări liniare

Considerăm problema de programare liniară în forma standard:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \tag{P}$$

Vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ se va numi **soluţie admisibilă** a problemei (P), dacă $A \cdot v = b$ şi $v \geq \mathbf{0}$.

O soluţie admisibilă $v \in \mathbb{R}^n$ este o **soluţie optimă** a problemei (P), dacă oricare ar fi soluţia admisibilă y, avem: $c^\top \cdot v \leq c^\top \cdot y$.

Fără a restrânge generalitatea, vom presupune că

$$rang\,(A) = m < n.$$

În cazul în care $m = n$, sistemul de ecuaţii ar avea o soluţie unică şi problema (P) ar deveni banală.

Teorema 1.3 (Teorema fundamentală a programării liniare)

(a) Dacă problema (P) are o soluţie admisibilă, atunci ea are şi o soluţie admisibilă de bază.
(b) Dacă problema (P) are o soluţie optimă, atunci ea are şi o soluţie optimă de bază.

Demonstraţie. (a) Fie $v \in \mathbb{R}^n$ o soluţie admisibilă a problemei (P). Fără a restrânge generalitatea, putem considera că primele k componente ale lui v sunt nenule, adică, $v = (v_1, v_2, ..., v_k, 0, ..., 0)^\top$, unde $v_i > 0$, $i = \overline{1,k}$.

Dacă $k = 0$, atunci $v = \mathbf{0}$ şi evident aceasta este o soluţie de bază. Fie deci $k \geq 1$.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt coloane liniar independente, atunci din nou v este o soluţie de bază şi afirmaţia este demonstrată.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt coloane liniar dependente, atunci există numerele $y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$, nu toate nule, deci $\sum\limits_{i=1}^{k} |y_i| > 0$, astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{k} A^i y_i = \mathbf{0}$. Vom considera vectorul $y \in \mathbb{R}^n$ format din primele k componente cu numerele y_i şi zero în rest: $y = (y_1, y_2, ..., y_k, 0, ..., 0)^\top$. Prin urmare, putem scrie:

$$y \neq \mathbf{0}, \quad \text{şi} \quad A \cdot y = \mathbf{0}. \tag{1.1.13}$$

Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$, definim vectorul $x(\lambda) = v + \lambda y$. Deoarece avem evident

$$A \cdot x(\lambda) = A \cdot (v + \lambda y) = A \cdot v + \lambda A \cdot y = A \cdot v = b,$$

rezultă că $x(\lambda)$ este o soluţie a sistemului $A \cdot x = b$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vom determina în continuare valorile lui λ pentru care să fie îndeplinită şi condiţia $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$. Deoarece $x_i(\lambda) = 0$ pentru $i = \overline{k+1,n}$, trebuie ca

$$x_i(\lambda) = v_i + \lambda y_i \geq 0, \quad \text{pentru} \quad i = \overline{1,k}.$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{-v_i}{y_i} \quad \text{dacă} \quad y_i > 0, \\ \lambda &\leq \frac{-v_i}{y_i} \quad \text{dacă} \quad y_i < 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă definim

$$\lambda' = \begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{-v_i}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} & \text{dacă există} \quad y_i > 0, \\ -\infty & \text{dacă nu există} \quad y_i > 0, \end{cases}$$

$$\lambda'' = \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le k}\left\{\frac{-v_i}{y_i} \mid y_i < 0\right\} & \text{dacă există} \quad y_i < 0, \\ -\infty & \text{dacă nu există} \quad y_i < 0, \end{cases}$$

atunci, pentru $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$ avem $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$, şi $x(\lambda)$ este soluţie admisibilă pentru problema (P). Deoarece numerele y_i, $i = \overline{1,k}$, nu sunt toate nule, rezultă că cel puţin una din valorile lui λ' sau λ'' este finită. Fie λ_0 una din valorile finite ale lui λ' sau λ''. Atunci, există un indice i_0, $1 \leq i_0 \leq k$, astfel încât $v_{i_0} + \lambda y_{i_0} = 0$. De aici rezultă că vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluţie admisibilă a problemei (P) şi are cel mult $k-1$ componente nenule. În această situaţie, dacă coloanele corespunzătoare sunt liniar independente, problema este rezolvată. În caz contrar, se reia raţionamentul cu cele $k-1$ coloane liniar dependente. Astfel, într-un număr finit de paşi vom ajunge fie la situaţia $k = 0$, sau vom obţine o soluţie admisibilă de bază.

(b) Fie $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ o soluţie optimă a problemei (P). La fel ca la punctul (a), putem considera că primele k componente ale lui $\bar{v}$ sunt neneule.

Dacă $k = 0$, atunci $\bar{v} = \mathbf{0}$ este o soluţie optimă de bază. Vom considera deci $k \geq 1$.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt coloane liniar independente, atunci evident $\bar{v}$ este o soluţie optimă de bază şi afirmaţia este demonstrată.

Dacă $\{A^1, A^2, ..., A^k\}$ sunt coloane liniar dependente, atunci, raţionând ca la punctul (a), există un vector $y \in \mathbb{R}^n$ neneul, astfel încât relaţia (1.1.13) să fie îndeplinită iar vectorul $x(\lambda) = \bar{v} + \lambda y$ să fie o soluţie admisibilă a problemei (P), pentru orice $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$. Deoarece $\bar{v}$ este o soluţie optimă, avem

$$c^\top \cdot \bar{v} \leq c^\top \cdot x(\lambda) = c^\top \cdot \bar{v} + \lambda c^\top \cdot y$$

de unde obţinem:

$$\lambda c^\top \cdot y \geq 0 \quad \text{pentru orice} \quad \lambda \in [\lambda', \lambda'']. \tag{1.1.14}$$

Din definiţia lui λ' şi λ'' rezultă $\lambda' < 0$ şi $\lambda'' > 0$. Din această cauză, nu putem avea $c^\top \cdot y \neq 0$, deoarece, în caz contrar, alegând pe λ de semn contrar lui $c^\top \cdot y$, am obţine $\lambda c^\top \cdot y < 0$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia (1.1.14). Prin urmare, $c^\top \cdot y = 0$ şi deci, pentru orice $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$, vectorul $x(\lambda)$ este o soluţie optimă. Ca şi în demonstaţia punctului (a), dând lui λ_0 una din valorile finite ale lui λ' sau λ'', vectorul $x(\lambda_0)$ este o soluţie optimă cu cel mult $k-1$ componente nenule. Dacă $x(\lambda_0)$ nu este o soluţie optimă de bază, atunci, reluând raţionamentul, într-un număr finit de paşi vom obţine o soluţie optimă de bază. ∎

În general, mulţimea soluţiilor admisibile a problemei (P) este infinită, spre deosebire de cea a soluţiilor admisibile de bază, care are cel mult C_n^m elemente. Importanţa teoremei fundamentale a programării liniare constă în aceea că, pentru determinarea unei soluţii optime, dacă ea există, căutarea este redusă de la o mulţime infinită, la una finită, fiind suficientă investigarea doar a soluţiilor de bază.

1.2. Teoremele algoritmului simplex

Rezolvarea problemelor de programare liniară a fost dominată timp de decenii (1950-1985) de algoritmul simplex. Această metodă a fost elaborată de G.B. Dantzig în jurul anului 1950 şi a cunoscut de-a lungul timpului o serie de îmbunătăţiri, mai ales în ceea ce priveşte implementarea ei pentru rezolvarea eficientă a problemelor de dimensiuni din ce în ce mai mari.

În esenţa sa, algoritmul simplex explorează în mod sistematic mulţimea soluţiilor admisibile de bază în aşa fel încât, prin trecerea de la o soluţie la alta, valoarea corespunzătoare a funcţiei obiectiv să fie cel puţin la fel de bună ca cea precedentă.

Să considerăm problema de programare liniară

$$\inf \left\{ c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \tag{P}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ şi $c \in \mathbb{R}^n$. Fără a restrânge generalitatea, vom presupune $rang(A) = m < n$. Fie $B = (A^{s_1} A^{s_2} ... A^{s_m})$ o matrice de bază şi în raport cu ea, partiţionăm matricea $A = \left(B \vdots R \right)$. Folosind notaţiile introduse la pagina 5, sistemul de ecuaţii $A \cdot x = b$ se poate rescrie astfel:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot x_{\mathcal{R}}$$

Dacă introducem notaţiile:

$$\bar{x} = B^{-1} \cdot b \quad \text{şi} \quad Y^j = B^{-1} \cdot A^j,\ 1 \leq j \leq n,$$

atunci putem scrie:

$$x_{\mathcal{B}} = \bar{x} - \sum_{j \in \mathcal{R}} Y^j x_j \tag{1.2.1}$$

Observaţia 1.2 *Trebuie să se ţină seama de ordinea coloanelor lui A care intră în compunerea matricei de bază B, aceasta fiind descrisă de secvenţa elementelor mulţimii indicilor de bază $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$. Valoarea unui anumit indice $s_i \in \mathcal{B}$ nu corespunde neapărat cu poziţia lui din secvenţă. Pentru a indica această poziţie, vom folosi notaţia: $loc\,(s_i)$. Prin urmare, dacă indicele s_i este în poziţia i, vom scrie: $i = loc\,(s_i)$.*

Scrisă pe componente, relaţia (1.2.1) devine:

$$x_{s_i} = \bar{x}_i - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{ij} x_j\,, \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc\,(s_i)\,.$$

O soluţie de bază corespunzătoare lui B este: $x_{\mathcal{B}} = \bar{x}$ şi $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$. Pentru ca aceasta să fie o soluţie de bază admisibilă a problemei (P), trebuie ca $\bar{x} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$.

Definiţia 1.2 *Matricea de bază B se numeşte* ***primal admisibilă****, dacă $B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$.*

Folosind relaţia (1.2.1), funcţia obiectiv $z = c^\top \cdot x$ se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned} z &= c_{\mathcal{B}}^\top \cdot x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{R}}^\top \cdot x_{\mathcal{R}} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \left(\bar{x} - \sum_{j \in \mathcal{R}} Y^j x_j \right) + c_{\mathcal{R}}^\top \cdot x_{\mathcal{R}} = \\ &= c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \bar{x} - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left(c_{\mathcal{B}}^\top \cdot Y^j - c_j \right) x_j \end{aligned}$$

Dacă introducem notaţiile $\bar{z} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \bar{x}$ şi $z_j = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot Y^j$, $1 \leq j \leq n$, atunci,

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}} (z_j - c_j)\, x_j \tag{1.2.2}$$

Evident, $\bar{z}$ reprezintă valoarea funcţiei obiectiv corespunzătoare soluţiei de bază $x_{\mathcal{B}} = \bar{x}$ şi $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$.

În cele ce urmează, convenim să ne referim la soluţia de bază $x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b$, subînţelegând că $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$.

Teorema 1.4 (de optimalitate) *Fie B o bază primal admisibilă. Dacă*

$$(z_j - c_j) \leq 0, \quad \text{pentru orice } j \in \mathcal{R}, \tag{1.2.3}$$

atunci baza B este optimă (adică, soluţia de bază $x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b$ este optimă) pentru problema (P).

Demonstraţie. Fie $v \in \mathbb{R}^n$ o soluţie admisibilă a problemei (P). Deoarece $v \geq \mathbf{0}$, iar funcţia obiectiv se poate exprima conform relaţiei (1.2.2), avem:

$$z = c^{\top} \cdot v = \bar{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}} (z_j - c_j) v_j \geq \bar{z}$$

■

Teorema 1.5 (de optim infinit) *Fie B o bază primal admisibilă. Dacă există $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k - c_k > 0$ şi $Y^k = B^{-1} \cdot A^k \leq \mathbf{0}$, atunci problema (P) are optimul infinit.*

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Definim vectorul $x(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}}(\lambda) \\ x_{\mathcal{R}}(\lambda) \end{pmatrix}$ în felul următor:

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{B}}(\lambda) &= \bar{x} - \lambda Y^k \\ x_{\mathcal{R}}(\lambda) &= \lambda e^{loc(k)} \end{aligned}$$

unde $e^{loc(k)} \in \mathbb{R}^{n-m}$ este un vector unitar, având 1 pe poziţia $loc(k)$ a indicelui k din $\mathcal{R}$.

Deoarece baza B este primal admisibilă, $\lambda \geq 0$ şi $Y^k \leq \mathbf{0}$, rezultă evident $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$. Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} A \cdot x(\lambda) &= B \cdot x_{\mathcal{B}}(\lambda) + R \cdot x_{\mathcal{R}}(\lambda) = \\ &= b - \lambda A^k + \lambda A^k = b. \end{aligned}$$

Prin urmare, pentru orice $\lambda \geq 0$, vectorul $x(\lambda)$ este o soluţie admisibilă.

Valoarea corespunzătoare a funcţiei obiectiv este:

$$\begin{aligned} c^{\top} \cdot x(\lambda) &= c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot x_{\mathcal{B}}(\lambda) + c_{\mathcal{R}}^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}}(\lambda) = \\ &= c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \left(\bar{x} - \lambda Y^k\right) + \lambda c_k = \bar{z} - \lambda\left(z_k - c_k\right) \end{aligned}$$

Deoarece $z_k - c_k > 0$, rezultă: $\lim\limits_{\lambda\to\infty} c^{\top} \cdot x(\lambda) = -\infty$. ■

Observaţia 1.3 *În condiţiile Teoremei de optim infinit, vectorul* $v \in \mathbb{R}^n$, *definit prin* $v_{\mathcal{B}} = -Y^k$, $v_{\mathcal{R}} = e^{loc(k)}$, *este o soluţie nenulă a sistemului omogen* $\{A \cdot x = 0,\ x \geq \mathbf{0}\}$. *El defineşte o direcţie (rază) de-a lungul căreia soluţiile admisibile* $x(\lambda)$ *sunt nemărginite. Deoarece el reprezintă o muchie a domeniului de admisibilitate, vectorul* v *se mai numeşte* ***rază extremă****.*

Lema 1.6 (Lema substituţiei) *Fie* $B = \left(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_m}\right) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *o matrice pătratică nesingulară şi vectorul* $A^k \in \mathbb{R}^m$, *cu indicele* $k \notin \{s_1, s_2, ..., s_m\} \overset{not}{=} \mathcal{B}$. *Considerăm matricea*

$$\tilde{B} = \left(A^{s_1} \cdots A^{s_{r-1}} A^k A^{s_{r+1}} \cdots A^{s_m}\right),$$

obţinută din B *prin înlocuirea lui* A^{s_r} *cu* A^k. *Notăm vectorul* $Y^k = B^{-1}A^k = \left(y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{mk}\right)^{\top}$. *Au loc următoarele afirmaţii:*

(a) *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca matricea* $\tilde{B}$ *să fie nesingulară este ca elementul* $y_{rk} \neq 0$, unde $r = loc(s_r)$.

(b) *Pentru* $y_{rk} \neq 0$, *dacă notăm vectorul*

$$\eta = \left(\frac{-y_{1k}}{y_{rk}}, ..., \frac{-y_{r-1,k}}{y_{rk}}, \frac{1}{y_{rk}}, \frac{-y_{r+1,k}}{y_{rk}}, ..., \frac{-y_{mk}}{y_{rk}}\right)^{\top}$$

şi matricea pătratică $E_r(\eta) = \left(e^1 \cdots e^{r-1}\ \eta\ e^{r+1} \cdots e^m\right)$, *unde* $e^j \in R^m$ *este vectorul unitar cu* 1 *în poziţia* j, *atunci*

$$\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \tag{1.2.4}$$

Demonstraţie. Deoarece $Y^k = B^{-1}A^k$, rezultă

$$A^k = B \cdot Y^k = \sum_{j=1}^{m} A^{s_j} y_{jk} \tag{1.2.5}$$

Pentru a demonstra necesitatea, fie $\tilde{B}$ nesingulară şi presupunem prin absurd că $y_{rk} = 0$. În acest caz însă, din (1.2.5) rezultă că coloanele lui $\tilde{B}$ sunt liniar dependente, ceea ce contrazice faptul că $\tilde{B}$ este nesingulară. Deci, trebuie să avem $y_{rk} \neq 0$.

Pentru a demonstra suficienţa, fie $y_{rk} \neq 0$ şi presupunem prin absurd că $\tilde{B}$ este singulară, adică are coloanele liniar dependente. Prin urmare, există coeficienţii λ_j, $j = \overline{1,m}$, nu toţi nuli $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} |\lambda_j| > 0\right)$, astfel încât:

$$\sum_{j=1,\, j\neq r}^{m} A^{s_j}\lambda_j + A^k\lambda_r = \mathbf{0}.$$

Observăm că în această relaţie trebuie să avem $\lambda_r \neq 0$, deoarece, în caz contrar, obţinem o combinaţie liniară de coloane ale matricei B ca fiind egală cu zero, ceea ce contrazice nesingularitatea lui B.

Înlocuind pe A^k din (1.2.5), obţinem:

$$\sum_{j=1,\, j\neq r}^{m} A^{s_j}\left(\lambda_j + y_{jk}\lambda_r\right) + A^{s_r} y_{rk}\lambda_r = \mathbf{0}, \tag{1.2.6}$$

adică o combinaţie liniară de coloane ale matricei B, care este egală cu zero şi deci toţi coeficienţii trebuie să fie nuli. Din ipoteză, $y_{rk} \neq 0$, iar $\lambda_r \neq 0$, din observaţia făcută mai înainte. Rezultă $y_{rk}\lambda_r \neq 0$ şi astfel relaţia (1.2.6) contrazice nesingularitatea lui B. Prin urmare, $\tilde{B}$ trebuie să fie nesingulară.

Pentru a stabili cea de a doua afirmaţie a lemei, să observăm că pentru $j \neq r$, coloanele "j" ale lui B coincid cu cele ale lui $\tilde{B}$. Deci,

$$A^{s_j} = \tilde{B} \cdot e^j\,, \quad \text{pentru } j \neq r.$$

Deoarece $y_{rk} \neq 0$, din (1.2.5) obţinem:

$$A^{s_r} = \sum_{j=1,\, j\neq r}^{m} A^{s_j}\left(\frac{-y_{jk}}{y_{rk}}\right) + A^k\frac{1}{y_{rk}} = \tilde{B} \cdot \eta$$

Prin urmare, putem scrie:

$$B = \tilde{B} \cdot E_r\left(\eta\right)$$

Deoarece B şi $\tilde{B}$ sunt nesingulare, ele sunt inversabile şi, înmulţind la stânga cu $\tilde{B}^{-1}$ şi la dreapta cu B^{-1}, rezultă relaţia (1.2.4). ∎

Observaţia 1.4 *Lema substituţiei este un rezultat al algebrei liniare, independent de contextul problemelor de optimizare pe care-l studiem, având importanţă atât teoretică, cât mai ales practică, datorită formulei (1.2.4). Prezentarea lemei cu notaţiile folosite aici are drept scop aplicarea ei în mod direct la justificarea rezultatelor pe care le vom prezenta în continuare.*

Teorema 1.7 (de schimbare a bazei) *Fie B o bază primal admisibilă. Presupunem că există $k \in \mathcal{R}$ astfel încât $z_k - c_k > 0$ şi vectorul $Y^k = B^{-1} \cdot A^k$ are cel puţin un element pozitiv. Dacă alegem indicele $s_r \in \mathcal{B}$, cu $loc\,(s_r) = r$, astfel încât*

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\}, \tag{1.2.7}$$

atunci, matricea $\tilde{B}$, obţinută din B prin înlocuirea lui A^{s_r} cu A^k, este o matrice de bază primal admisibilă, pentru care avem:
$\tilde{z} = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b \le c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot b = \bar{z}$.

Demonstraţie. Din relaţia (1.2.7) avem evident $y_{rk} > 0$. Din Lema substituţiei rezultă că $\tilde{B}$ este o matrice nesingulară. Pentru a vedea că ea este o matrice de bază primal admisibilă, trebuie să verificăm că $\tilde{B}^{-1} \cdot b \ge \mathbf{0}$. Aplicând formula (1.2.4), avem:

$$\tilde{B}^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = E_r(\eta) \cdot \bar{x} =$$
$$= \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \\ & 1 & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \\ & & \vdots & \\ & 0 \;\cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{x}_i \\ \vdots \\ \bar{x}_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \bar{x}_r \\ \vdots \\ \dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

unde pentru $i \neq r$ obţinem elementul generic $\bar{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} \bar{x}_r$, iar pentru $i = r$ avem elementul $\dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}}$. Baza B fiind primal admisibilă, avem

$\bar{x}_i \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1,m}$, şi deci $\dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geq 0$. Dacă $y_{ik} \leq 0$, atunci evident $\bar{x}_i - y_{ik}\dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geq 0$. Dacă $y_{ik} > 0$, din (1.2.7) avem $\dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \leq \dfrac{\bar{x}_i}{y_{ik}}$ şi deci,

$$\bar{x}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{x}_r = y_{ik}\left(\frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}\right) \geq 0.$$

În concluzie, $\tilde{B}^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$, adică $\tilde{B}$ este bază primal admisibilă.

În continuare, ţinând seama că pentru $k \in \widetilde{\mathcal{B}}$ avem $loc(k) = r$, obţinem:

$$\tilde{z} = c_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b = c_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot b = c_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot E_r(\eta) \cdot \bar{x} =$$

$$= (\cdots, c_{s_i}, \cdots, c_k, \cdots) \cdot \begin{pmatrix} \ddots & & & \vdots & \\ \cdots & 1 & & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \\ & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{1}{y_{rk}} & \\ & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \bar{x} =$$

$$= \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, \sum_{i \neq r} \frac{-c_{s_i} y_{ik}}{y_{rk}} + \frac{c_k}{y_{rk}}, \cdots\right) \cdot \bar{x} =$$

$$= \sum_{i \neq r} c_{s_i}\bar{x}_i - \left(\sum_{i \neq r} c_{s_i} y_{ik} - c_k\right)\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} + c_{s_r}\bar{x}_r - c_{s_r}\bar{x}_r\frac{y_{rk}}{y_{rk}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i}\bar{x}_i - \left(\sum_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ik} - c_k\right)\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \bar{z} - (z_k - c_k)\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \leq \bar{z}$$

deoarece $\sum\limits_{i=1}^{m} c_{s_i} y_{ik} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y^k = z_k$, iar $(z_k - c_k)\dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geq 0$. ■

Observaţia 1.5 *Precizăm faptul că, în urma unei schimbări de bază, avem:* $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \setminus \{s_r\} \cup \{k\}$ *şi* $loc(k) = r$.

Teoremele prezentate mai sus justifică următoarea metodă de rezolvare a problemelor de programare liniară, metodă cunoscută sub denumirea de "algoritmul simplex primal", sau pe scurt, "algoritmul simplex".

Algoritmul simplex primal.

Pasul 0. Se determină (dacă există) o bază **primal admisibilă** B. Se calculează B^{-1}.

Pasul 1. Se calculează: $\bar{x} = B^{-1} \cdot b$, $\bar{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \bar{x}$, $Y = B^{-1} \cdot A$, $z^{\top} - c^{\top} = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot Y - c^{\top}$.

Pasul 2. **(testul de optimalitate)** Dacă $z^{\top} - c^{\top} \leq \mathbf{0}$, atunci $\bar{z}$ este valoarea optimă, iar $x_{\mathcal{B}} = \bar{x}$ şi $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$ este soluţia de bază optimă. STOP.

Pasul 3. **(testul de optim infinit)** Dacă există $k \in \mathcal{R}$ pentru care $z_k - c_k > 0$ şi $Y^k \leq \mathbf{0}$, atunci problema are optim infinit. STOP.

Pasul 4. **(schimbarea bazei)** Se alege $k \in \mathcal{R}$ cu $z_k - c_k > 0$ şi se determină $s_r \in \mathcal{B}$, cu $loc\,(s_r) = r$, astfel încât:

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\}.$$

Se formează matricea $\tilde{B}$, care se obţine din B prin înlocuirea coloanei A^{s_r} cu A^k, se calculează $\tilde{B}^{-1}$ cu formula (1.2.4), şi cu această inversă a noii matrice de bază se revine la Pasul 1.

1.2.1. Determinarea unei baze primal admisibile

În prezentarea algoritmului simplex, "Pasul 0" lasă deschisă problema determinării unei baze primal admisibile. Găsirea unei astfel de baze se poate face în mai multe moduri. Una dintre metodele cele mai naturale constă în asocierea unei "probleme artificiale", în aşa fel încât, folosind algoritmul simplex pentru rezolvarea acesteia, să obţinem fie o bază primal admisibilă pentru (P), fie răspunsul că problema (P) nu admite soluţie, adică, nu există nici o bază primal admisibilă pentru ea. Acestă metodă este numită **"metoda celor două faze"**, deoarece, în prima fază se rezolvă problema artificială, iar în cazul că s-a obţinut o bază primal admisibilă pentru (P), în cea de-a doua fază se rezolvă problema iniţială (P).

Să considerăm din nou problema:

$$\inf \left\{ c^{\top} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \tag{P}$$

în care, rangul matricei A nu mai este specificat şi presupunem $b \geq \mathbf{0}$. Acest lucru nu restrânge generalitatea, deoarece, dacă există o componentă $b_i < 0$, restricţia respectivă se poate înmulţi cu -1.

Acestei probleme îi asociem **problema artificială**:

$$\min\left\{\mathbf{e}^\top \cdot x^a \mid A \cdot x + \mathbf{I}_m \cdot x^a = b,\ x \geq \mathbf{0},\ x^a \geq \mathbf{0}\right\} \qquad (\mathrm{P}_a)$$

unde vectorul $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ are toate componentele egale cu 1, iar $\mathbf{I}_m$ este matricea unitate de ordinul m. Componentele variabilei "artificiale" $x^a \in \mathbb{R}^m$ le vom nota în continuarea celor lui x, adică, $x^a = \left(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}\right)^\top$.

Problema artificială asociată lui (P) are câteva proprietăţi importante. În primul rând, matricea restricţiilor problemei (P_a) este $\left(A \vdots \mathbf{I}_m\right) \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ şi astfel,

$$rang\left(A \vdots \mathbf{I}_m\right) = m < n+m.$$

Pe de altă parte, matricea unitate $\mathbf{I}_m$ este evident o bază primal admisibilă pentru (P_a), deoarece $\mathbf{I}_m^{-1} \cdot b = b \geq \mathbf{0}$. În fine, cerinţa $x^a \geq \mathbf{0}$ implică $\mathbf{e}^\top \cdot x^a = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{n+i} \geq 0$, adică, problema (P_a) va avea întotdeauna un minim nenegativ.

Prin urmare, pentru rezolvarea problemei (P_a), se poate aplica algoritmul simplex, luând ca bază primal admisibilă iniţială matricea $\mathbf{I}_m$.

Fie B baza optimă care se obţine la rezolvarea problemei (P_a), $\mathcal{B}$ mulţimea corespunzătoare a indicilor de bază şi vom nota cu z_a valoarea optimă (minimă) a problemei (P_a). Avem evident $z_a \geq 0$.

Propoziţia 1.8 *Dacă $z_a > 0$, atunci problema iniţială (P) nu are soluţie.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că (P) ar avea o soluţie admisibilă. Atunci, în baza Teoremei fundamentale a programării liniare, (P) are şi o soluţie admisibilă de bază. Fie B_* matricea de bază corespunzătoare. Aceasta este constituită doar din coloane ale matricei A şi evident $B_*^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$. Astfel, B_* este o bază primal admisibilă şi pentru (P_a), iar soluţia de bază corespunzătoare va conţine printre varibilele secundare toate componentele lui x^a. Prin urmare, $x^a = \mathbf{0}$, ceea ce contrazice faptul că valoarea optimă a lui (P_a) este $z_a > 0$. ■

Propoziţia 1.9 *Dacă $\mathcal{B} \cap \{n+1, ..., n+m\} = \emptyset$, atunci $z_a = 0$ şi B este o bază primal admisibilă pentru problema iniţială (P).*

Demonstraţie. Deoarece $\mathcal{B} \cap \{n+1, ..., n+m\} = \emptyset$, în soluţia de bază optimă toate componentele lui x^a sunt componente secundare, deci au valoarea egală cu zero şi evident $z_a = 0$. Pe de altă parte, toate coloanele matricei de bază B sunt formate din coloane ale lui A, şi deoarece în (P_a) avem $B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$, matricea B este o matrice de bază primal admisibilă şi pentru problema (P). ■

Propoziţia 1.10 *Dacă $z_a = 0$ şi există $n + i_0 \in \mathcal{B}$ pentru care $y_{i_0 j} = 0$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, unde $(y_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = B^{-1} \cdot A$ şi $i_0 = loc\,(n+i_0)$, atunci, $rang\,(A) \leq m-1$ şi restricţia i_0 este o combinaţie liniară de celelalte restricţii.*

Demonstraţie. Deoarece $Y^j = B^{-1} \cdot A^j$, pentru orice $j = \overline{1,n}$, avem:

$$A^j = B \cdot Y^j = \sum_{s_i \in \mathcal{B}} A^{s_i} y_{ij}\,, \quad \text{unde } i = loc\,(s_i)\,.$$

Prin faplul că $n + i_0 \in \mathcal{B}$ şi $y_{i_0 j} = 0$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, rezultă că orice coloană A^j a matricei A se poate scrie ca o combinaţie liniară de cel mult $m-1$ vectori liniari independenţi, ce intră în compunerea bazei B:

$$A^j = \sum_{s_i \in \mathcal{B}\setminus\{n+i_0\}} A^{s_i} y_{ij}$$

şi prin urmare, $rang\,(A) \leq m-1$.

În această situaţie, liniile matricei A, pe care le vom nota cu A_i, $i = \overline{1,m}$, vor fi liniar dependente: există numerele $\lambda_i \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \lambda_i = 0.$$

Se observă că trebuie să avem $\lambda_{i_0} \neq 0$. În caz contrar, deoarece matricea de bază B conţine vectorul unitar e^{i_0}, ar rezulta că în problema

(P_a) avem $rang\left(A \vdots \mathbf{I}_m\right) < m$, ceea ce este absurd. Prin urmare, putem scrie:

$$A_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} A_i$$

şi deoarece sistemul de ecuaţii $A \cdot x = b$ este compatibil, trebuie să aibe loc şi relaţia:

$$b_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} b_i$$

de unde concluzia că restricţia i_0 este o combinaţie liniară de celelalte restricţii. ■

Observaţia 1.6 *Dacă valoarea optimă a problemei (P_a) este $z_a = 0$, atunci toate variabilele artificiale care au mai rămas în bază vor avea valoarea zero.*

Pe de altă parte, din problema (P) pot fi eliminate toate restricţiile care corespund condiţiilor din Propoziţia 1.10. Astfel, dimensiunea problemei va fi redusă, iar matricea rezultată va avea rangul egal cu numărul de linii.

Propoziţia 1.11 *Dacă $z_a = 0$ şi există $n + i_0 \in \mathcal{B}$ astfel încât pentru un anume $k = \overline{1,n}$, avem $y_{i_0k} \neq 0$, unde $(y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = Y = B^{-1} \cdot A$ şi $i_0 = loc\,(n + i_0)$, atunci, se poate efectua o schimbare de bază prin care vectorul unitar e^{i_0} din B să fie înlocuit de coloana A^k.*

Demonstraţie. Deoarece $y_{i_0k} \neq 0$, din Lema substituţiei deducem că noua matrice $\tilde{B}$ astfel obţinută este nesingulară. Pe de altă parte, deoarece $\bar{x}_{i_0} = 0$, din (1.2.8) (pentru $r = i_0$) deducem că $\tilde{B}^{-1} \cdot b = B^{-1} \cdot b$, adică $\tilde{B}$ este o bază primal admisibilă, aşa cum a fost şi B. ■

Din rezultatele prezentate mai sus rezultă că, prin rezolvarea problemei artificiale (P_a), obţinem una din situaţiile următoare:

1. Problema (P_a) are optimul $z_a > 0$. În cazul acesta, problema iniţială (P) nu are soluţie.
2. Problema (P_a) are optimul $z_a = 0$ şi $\mathcal{B} \cap \{n+1, ..., n+m\} = \emptyset$, adică, toate variabilele artificiale au fost eliminate din bază. În

acest caz, baza optimă B a problemei (P_a) este primal admisibilă pentru problema iniţială (P).

3. Problema (P_a) are optimul $z_a = 0$ şi $\mathcal{B} \cap \{n+1, ..., n+m\} \neq \emptyset$, adică, în baza optimă sunt încă prezente variabile artificiale. Acestea pot fi eliminate, conform Propoziţiior 1.10 şi 1.11, astfel încât, noua bază rezultată să conţină doar coloane ale matricei A şi astfel, ea este primal admisibilă pentru problema (P).

1.2.2. Formule pentru schimbarea bazei şi organizarea calculelor

Fiecare iteraţie a algoritmului simplex este caracterizată de inversa B^{-1} a unei baze primal admisibile. Cu ajutorul acesteia sunt calculate toate celelalte elemente necesare pentru efectuarea paşilor algoritmului. Aceste elemente sunt următoarele:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = B^{-1} \cdot b; \quad u^\top = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1};\\
&\bar{z} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \bar{x} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1} \cdot b = u^\top \cdot b;\\
&Y = B^{-1} \cdot A;\\
&z^\top - c^\top = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot Y - c^\top = u^\top \cdot A - c^\top
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

Componentele vectorului u se mai numesc şi "*multiplicatori simplex*", deoarece, cu ajutorul lor se poate calcula atât valoarea funcţiei obiectiv, corespunzătoare soluţiei de bază curente, cât şi componentele lui $z - c$, care, la rândul lor, se mai numesc şi "*costuri reduse*". Această denumire din urmă provine din faptul că unii autori folosesc vectorul $c - z$ în elaborarea algoritmului simplex.

Dacă testul de optimalitate, sau de optim infinit, nu este îndeplinit, atunci, conform teoremei de schimbare a bazei, putem găsi o nouă bază primal admisibilă $\tilde{B}$ cu inversa căreia se calculează din nou elementele de mai sus. Trecerea de la B^{-1} la $\tilde{B}^{-1}$ se poate face cu ajutorul Lemei substituţiei: cunoscând indicele k pentru coloana A^k care intră în bază, indicele $r = loc(s_r)$ pentru coloana A^{s_r} care iese din bază şi vectorul $Y^k = B^{-1} \cdot A^k$, se formează matricea $E_r(\eta)$ şi atunci putem folosi relaţia (1.2.4).

Dacă notăm $B^{-1} = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}}$ şi $\tilde{B}^{-1} = \left(\tilde{\beta}_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}}$, atunci din (1.2.4) obţinem:

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\beta_{rj}y_{ik}}{y_{rk}} \quad \text{pentru } i=\overline{1,m},\ i\neq r,\ j=\overline{1,m};\\ &\tilde{\beta}_{rj} = \frac{\beta_{rj}}{y_{rk}} \quad \text{pentru } j=\overline{1,m}.\end{aligned}} \tag{1.2.10}$$

De asemenea, folosind relaţia (1.2.4), putem deduce nişte formule care permit calcularea noilor valori ale elementelor din (1.2.9), corespunzătoare lui $\tilde{B}$, direct din cele vechi, corespunzătoare lui B. Avem:

$$\tilde{x} = \tilde{B}^{-1}\cdot b = E_r(\eta)\cdot B^{-1}\cdot b = E_r(\eta)\cdot\bar{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & & \vdots & \\ & 1 & \dfrac{-y_{ik}}{y_{rk}} & \\ & & \vdots & \\ & 0 & \dfrac{1}{y_{rk}} & \\ & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{x}_i \\ \vdots \\ \bar{x}_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{x}_i - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{x}_r \\ \vdots \\ \dfrac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

adică

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{x}_i = \bar{x}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{x}_r \quad \text{pentru } i\neq r\,;\\ &\tilde{x}_r = \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \quad \text{unde } r = loc\,(k) \ \text{ pentru } k\in\widetilde{\mathcal{B}}.\end{aligned}} \tag{1.2.11}$$

Vectorul multiplicatorilor simplex u, se calculează astfel:

$$\tilde{u}^{\top} = c_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\top}\cdot\tilde{B}^{-1} = (\cdots, c_{s_i}, \cdots, c_k, \cdots)\cdot E_r(\eta)\cdot B^{-1}$$

unde $loc\,(s_i) = i$, $1\leq i\leq m$, $i\neq r$, iar pentru $k\in\widetilde{\mathcal{B}}$, avem $loc\,(k) = r$.

Componenta "j" a lui $\tilde{u}$ capătă expresia:

$$\tilde{u}_j = \left(\cdots, c_{s_i}, \cdots, \sum_{i\neq r} \frac{-c_{s_i} y_{ik}}{y_{rk}} + \frac{c_k}{y_{rk}}, \cdots\right) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_{ij} \\ \vdots \\ \beta_{rj} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i\neq r} c_{s_i}\beta_{ij} - \left(\sum_{i\neq r} c_{s_i} y_{ik} - c_k\right)\frac{\beta_{rj}}{y_{rk}} + c_{s_r}\beta_{rj} - c_{s_r}\beta_{rj}\frac{y_{rk}}{y_{rk}}$$

deci,

$$\boxed{\tilde{u}_j = u_j - (z_k - c_k)\frac{\beta_{rj}}{y_{rk}}, \quad 1 \le j \le m.} \tag{1.2.12}$$

Pentru matricea $\tilde{Y} = \tilde{B}^{-1} \cdot A$, coloana $\tilde{Y}^j$, $1 \le j \le n$, este

$$\tilde{Y}^j = \tilde{B}^{-1} \cdot A^j = E_r(\eta) \cdot B^{-1} \cdot A^j = E_r(\eta) \cdot Y^j = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \\ \vdots \\ \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

prin urmare,

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{y}_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \quad \text{pentru } i = \overline{1,m},\ i \neq r\,; \\ \tilde{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} \end{array}} \tag{1.2.13}$$

Valoarea funcţiei obiectiv se poate exprima astfel:

$$\tilde{z} = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\top} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b = \tilde{u}^{\top} \cdot b = \sum_{j=1}^{m} \tilde{u}_j b_j$$

Folosind relaţia (1.2.12) obţiem:

$$\tilde{z} = \sum_{j=1}^{m}\left(u_j - (z_k - c_k)\frac{\beta_{rj}}{y_{rk}}\right) b_j = \sum_{j=1}^{m} u_j b_j - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \sum_{j=1}^{m} \beta_{rj} b_j$$

deci,

$$\boxed{\tilde{z} = \bar{z} - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \bar{x}_r} \tag{1.2.14}$$

Pentru orice j, $1 \le j \le n$, coeficienţii costurilor reduse se calculează în mod asemănător:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_j - c_j &= c_{\tilde{B}}^\top \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot A^j - c_j = \tilde{u}^\top \cdot A^j - c_j = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{m} \left(u_i - (z_k - c_k) \frac{\beta_{ri}}{y_{rk}} \right) a_{ij} - c_j = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j \right) - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ri} a_{ij}
\end{aligned}$$

prin urmare,

$$\boxed{\tilde{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)\, y_{rj}}{y_{rk}}, \quad 1 \le j \le n.} \tag{1.2.15}$$

Tabloul simplex standard.

Dacă problema de programare liniară nu este prea mare, ea poate fi rezolvată şi manual cu ajutorul algoritmului simplex. Pentru aceasta, în raport cu o bază curentă B, elementele necesare calculelor se pot aşeza într-un tablou de forma următoare:

$$\begin{array}{c|c|c|}
\cline{2-3}
x_B & \bar{x} & Y \\
\cline{2-3}
 & \bar{z} & z^\top - c^\top \\
\cline{2-3}
\end{array}$$

Într-o descriere mai detaliată, tabloul de mai sus se prezintă astfel:

$$\begin{array}{c|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_{s_i} & \bar{x}_i & \cdots & y_{ij} & & y_{ik} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x_{s_r} & \bar{x}_r & \cdots & y_{rj} & & \boxed{y_{rk}} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cline{2-7}
 & \bar{z} & \cdots & z_j - c_j & \cdots & z_k - c_k & \cdots \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

Se constată cu uşurinţă că, pentru orice $j \in \mathcal{B}$, cu $loc\,(j) = i$, avem $Y^j = B^{-1} \cdot A^j = e^i$, unde $e^i \in \mathbb{R}^m$ este vectorul unitar cu 1 în poziţia i. Astfel, în tabloul simplex, pentru coloanele j corespunzătoare bazei avem: $y_{lj} = 0$, pentru $l \neq i$, şi $y_{ij} = 1$. În plus, avem:

$$z_j - c_j = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot B^{-1} \cdot A^j - c_j = c_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot e^i - c_j = c_j - c_j = 0, \quad \forall\, j \in \mathcal{B}.$$

Pentru testul de optimalitate, se analizează costurile reduse $z_j - c_j$ din ultima linie a tabloului. Dacă acestea sunt toate mai mici sau egale cu zero, atunci baza curentă B este optimă. Vectorul $\bar{x}$ este soluţia de bază optimă şi $\bar{z}$ este valoarea optimă a problemei.

Dacă există un $z_k - c_k > 0$, pentru care $y_{ik} \leq 0$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, atunci poblema are optim infinit.

Dacă există $z_k - c_k > 0$, pentru care avem cel puţin un element $y_{ik} > 0$, atunci alegem indicele r conform relaţiei (1.2.7). Elementul $y_{rk} \neq 0$, se numeşte **pivot**, iar linia, respectiv coloana corespunzătoare din tabloul simplex, se va numi "*linia pivotului*", respectiv "*coloana pivotului*".

Pivotul y_{rk} joacă un rol important la calcularea elementelor unui tablou simplex nou, care va corespunde bazei primal admisibile $\tilde{B}$. Vom nota elementele acestui tablou cu $\tilde{t}_{ij}$, $i = \overline{1, m+1}$ şi $j = \overline{0,n}$, unde coloana $j = 0$ corspunde lui $\tilde{x}$ şi $\tilde{z}$. Elementele tabloului simplex corespunzător lui B le vom nota cu t_{ij}. Analizând formulele de schimbare a bazei obţinute mai sus, (1.2.11), (1.2.13), (1.2.14) şi (1.2.15), putem enunţa următoarele reguli pentru calcularea noilor valori ale tabloului simplex, folosind pe cele vechi:

1. Linia pivotului se împarte la pivot:

$$\tilde{t}_{rj} = \frac{t_{rj}}{y_{rk}}, \quad \forall\, j = \overline{0,n}.$$

2. Coloana pivotului devine un vector unitar:

$$\tilde{t}_{rk} = 1 \quad \text{şi} \quad \tilde{t}_{ik} = 0, \quad \forall\, i = \overline{1, m+1},\ i \neq r.$$

3. Restul elementelor din tablou, se calculează după "*regula dreptunghiului*", adică:

$$\tilde{t}_{ij} = t_{ij} - \frac{t_{rj}\, t_{ik}}{y_{rk}}, \quad \begin{cases} \forall\, i = \overline{1, m+1},\ i \neq r \\ \forall\, j = \overline{0,n},\ j \neq k \end{cases}$$

Denumirea provine din faptul că, fiecare element t_{ij} formează cu pivotul y_{rk} extremităţile unei diagonale a unui dreptungi din tabloul simplex, în timp ce elementele t_{rj} şi t_{ik}, se află pe cealaltă diagonală.

Tabloul simplex revizuit.

Formulele de schimbare a bazei permit organizarea calculelor şi în alt mod. Deoarece se constată cu uşurinţă că toate elementele necesare în aplicarea algoritmului simplex sunt calculate cu ajutorul matricei B^{-1}, se poate considera următorul tablou:

$x_{\mathcal{B}}$	$\bar{x}$	B^{-1}	
	$\bar{z}$	$u^\top$	

unde ultima coloană se completează doar înainte de a efectua o schimbare de bază. O iteraţie a algoritmului simplex constă din următoarele operaţii:

- Cu ajutorul multiplicatrilor simplex u, se calculează costurile reduse: $z_j - c_j = u^\top \cdot A^j - c_j$, pentru $j \in \mathcal{R}$. Dacă toate aceste valori sunt mai mici sau egale cu zero, atunci baza B este optimă. STOP.
- Dacă testul de optimalitate nu este trecut, se alege un $z_k - c_k > 0$. Se calculează $Y^k = B^{-1} \cdot A^k$. Dacă avem $Y^k \leq \mathbf{0}$, atunci problema are optim infinit. STOP.
- În caz contrar, se completează ultima coloană a tabloului simplex revizuit cu Y^k şi $z_k - c_k$. Într-o prezentare mai detaliată, dacă notăm elementele matricei $B^{-1} = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq m}}$, acesta va arăta

astfel:

$$
\begin{array}{c|c|ccc|c|}
\cline{2-6}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{s_i} & \bar{x}_i & \cdots & \beta_{ij} & \cdots & y_{ik} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{s_r} & \bar{x}_r & \cdots & \beta_{rj} & \cdots & \boxed{y_{rk}} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cline{2-6}
 & \bar{z} & \cdots & u_j & \cdots & z_k - c_k \\
\cline{2-6}
\end{array}
$$

Aplicând relaţia (1.2.7), se determină pivotul y_{rk}.

- Din formulele de schimbare a bazei (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) şi (1.2.14), rezultă că şi în acest caz, pentru a calcula noile valori ale tabloului simplex revizuit, corespunzător matricei de bază $\tilde{B}$, se poate proceda similar ca la tabloul simplex standard, cu observaţia că ultima coloană va rămâne liberă pentru iteraţia următoare:
  (a) Linia pivotului se împarte la y_{rk}.
  (b) Elementele care nu se află pe linia pivotului se calculează folosind "regula dreptunghiului".

Observaţia 1.7 *Acest procedeu de efectuare a claculelor mai este cunoscut şi sub denumirea de "**algoritmul simplex revizuit**", fără a fi de fapt o metodă distinctă de algoritmul simplex primal.*

1.3. Adaptarea algoritmului simplex la probleme cu variabile mărginite

În modelarea matematică a problemelor care provin din activităţi economice, apare în mod natural necesitatea de a impune restricţii de mărginire asupra unor variabile. Spre exemplu, dacă variabila x reprezintă numărul de pâini care urmează să fie produs într-o brutărie, atunci există evident un număr minim $l_{\min}$ de pâini care trebuie să fie produs, deoarece altfel procesul de fabricaţie nu ar mai fi eficient. Pe de altă parte, din motive tehnologice, cum ar fi spre exemplu capacitatea cuptoarelor, există şi o limitare maximă $l_{\max}$ de pâini care se pot produce. Prin urmare, restricţii de forma

$$l_{\min} \leq x \leq l_{\max} \tag{1.3.1}$$

pot apare frecvent iar numărul acestora este adesea chiar egal cu cel al variabilelor din problemă.

Condiţiile de acest fel pot fi incluse foarte uşor în sistemul de restricţii a problemei, şi anume, (1.3.1) se poate rescrie într-un mod echivalent astfel:

$$\begin{aligned} x + y_1 &= l_{\max} \\ x - y_2 &= l_{\min} \\ y_1 \geq 0,\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Transformarea condiţiilor de mărginire a variabilelor prin utilizarea acestor operaţii elementare conduce însă inevitabil la creşterea dimensiunilor sistemului de restricţii, atât în ceea ce priveşte numărul de ecuaţii, cât şi cel al numărului de variabile.

Forma particulară a condiţiilor (1.3.1) permite însă evitarea introducerii lor efective în sistemul de restricţii a problemei, dar acest lucru impune ca în algoritmul simplex să se facă o analiză specială cu privire la testul de optimalitate şi la operaţiile de schimbare a bazei.

Să considerăm următoarea problemă, în care toate variabilele sunt inferior şi superior mărginite:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top \cdot y \mid A \cdot y = b_0,\ l_{\min} \leq y \leq l_{\max} \right\} \tag{1.3.2}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ şi $l_{\min} \in \mathbb{R}^n$, $l_{\max} \in \mathbb{R}^n$. Dacă facem schimbarea de variabilă:

$$x = y - l_{\min}$$

problema (1.3.2) se poate rescrie într-o formă echivalentă astfel:

$$c^\top \cdot l_{\min} + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ \mathbf{0} \leq x \leq \beta \right\}$$

unde $b = b_0 - A \cdot l_{\min}$ şi $\beta = l_{\max} - l_{\min}$. Prin urmare, fără a restrânge generalitatea, este suficient să considerăm doar probleme de forma:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ \mathbf{0} \leq x \leq \beta \right\} \tag{1.3.3}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ şi $rang(A) = m \leq n$. Mulţimea soluţiilor admisibile pentru problema (1.3.3) o vom nota astfel:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\ \mathbf{0} \leq x \leq \beta\}.$$

Să considerăm din nou o partiţie a coloanelor matricei A de forma $A = \left(B \vdots R\right)$, unde $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ este o matrice de bază formată din coloane ale matricei A, iar $R \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ este constituită din restul coloanelor matricei A. În raport cu această partiţionare, folosind notaţiile introduse la pagina 5, componentele variabilei x şi cele ale vectorului c se grupează astfel: $x = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{B}} \\ c_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$.

Reluând calculele de la pagina 17, valoarea funcţiei obiectiv se exprimă astfel:

$$c^\top \cdot x = \bar{z} - \sum_{j\in\mathcal{R}} (z_j - c_j)\, x_j$$

unde $\bar{z} = c^\top \cdot B^{-1} \cdot b$ iar $z_j = c^\top \cdot B^{-1} \cdot A^j$.

Definiţia 1.3 *Pentru problema (1.3.3), un vector $x \in \mathbb{R}^n$ este o **soluţie de bază extinsă** în raport cu B, dacă $x_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$, şi oricare ar fi $j \in \mathcal{R}$ avem $x_j = 0$ sau $x_j = \beta_j$.*

Observaţia 1.8 *Pot exista mai multe soluţii de bază extinse care să fie asociate la aceeaşi matrice de bază B.*

Dacă $x \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie de bază extinsă în raport cu B, vom nota:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+ &= \{j \in \mathcal{R} \mid x_j = 0\} \\ \mathcal{R}^- &= \{j \in \mathcal{R} \mid x_j = \beta_j\} \end{aligned}$$

Teorema 1.12 (de optimalitate) *Fie $x \in \mathbb{R}^n$ o soluţie de bază extinsă în raport cu B. Dacă pentru orice $j \in \mathcal{R}^+$ avem $z_j - c_j \leq 0$ şi pentru orice $j \in \mathcal{R}^-$ avem $z_j - c_j \geq 0$, atunci x este o soluţie optimă a problemei (1.3.3).*

Demonstraţie. Fie $y \in \mathcal{P}$ o soluţie admisibilă pentru (1.3.3). Avem:

$$\begin{aligned} c^\top y &= c^\top B^{-1} b - \sum_{j \in \mathcal{R}^+} (z_j - c_j)\, y_j - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} (z_j - c_j)\, y_j \geq \\ &\geq c^\top B^{-1} b - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} (z_j - c_j)\, \beta_j = c^\top x. \end{aligned}$$

■

În continuare vom analiza modul în care se poate schimba o soluţie de bază extinsă care nu îndeplineşte condiţia de optimalitate. În raport cu baza B, soluţia generală a sistemului $A \cdot x = b$ se scrie astfel:

$$x_{\mathcal{B}} = \bar{x} - B^{-1} \cdot R \cdot x_{\mathcal{R}}$$

unde $\bar{x} = B^{-1} \cdot b$, sau, pe componente:

$$x_{s_i} = \bar{x}_i - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{ij} x_j \quad \text{pentru } i = loc\,(s_i) \text{ şi } s_i \in \mathcal{B},$$

unde matricea $Y = (y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = B^{-1} \cdot A$.

Fie $x \in \mathcal{P}$ o soluţie de bază extinsă în raport cu B. Prin urmare, componentele secundare x_j, $j \in \mathcal{R}$, au una din cele două valori extreme impuse variabilei, adică $x_j = 0$ sau $x_j = \beta_j$. Dacă testul de optimalitate nu este satisfăcut, atunci prin modificarea valorii unei anumite variabile secundare x_j putem obţine o nouă soluţie pentru care valoarea funcţiei obiectiv să fie mai mică sau cel mult egală cu vechea valoare. Evident, modificarea volorii lui x_j se poate face în sens crescător, de la 0 până la cel mult β_j, dacă $j \in \mathcal{R}^+$, sau în sens descrescător, de la β_j până la cel mai puţin 0, dacă $j \in \mathcal{R}^-$. Pentru a putea considera mereu $x_j = 0$, indiferent de sensul de variaţie pe care îl poate avea variabila secundară, vom rescrie expresia soluţiei de bază extinse $x \in \mathcal{P}$, în raport cu B, în felul următor:

$$x_{s_i} = \bar{x}_i - \sum_{j \in \mathcal{R}^+} y_{ij} x_j - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} y_{ij} \left(\beta_j - x_j\right), \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc\,(s_i) \tag{1.3.4}$$

adică,

$$x_{s_i} = \tilde{x}_i - \sum_{j \in \mathcal{R}^+} y_{ij} x_j + \sum_{j \in \mathcal{R}^-} y_{ij} x_j\,, \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc\,(s_i) \tag{1.3.5}$$

unde am notat:

$$\tilde{x}_i = \bar{x}_i - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} y_{ij}\beta_j.$$

De asemenea, expresia funcţiei obiectiv devine:

$$\begin{aligned} c^\top \cdot x &= \bar{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}^+} (z_j - c_j)\, x_j - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} (z_j - c_j)\left(\beta_j - x_j\right) = \\ &= \tilde{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}^+} (z_j - c_j)\, x_j + \sum_{j \in \mathcal{R}^-} (z_j - c_j)\, x_j \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

unde am notat:

$$\tilde{z} = \bar{z} - \sum_{j \in \mathcal{R}^-} (z_j - c_j)\, \beta_j.$$

Vom analiza următoarele două cazuri posibile de încălcare a condiţiilor de optimalitate.

Cazul 1: există $k \in \mathcal{R}^+$ pentru care $z_k - c_k > 0$.

În această situaţie avem $c^\top \cdot x = \tilde{z} - (z_k - c_k)\, x_k$, iar valoarea funcţiei obiectiv se va micşora cu atât mai mult, cu cât x_k primeşte o valoare mai mare. Dar evident, x_k nu poate depăşi limita sa superioară, adică trebuie să ţinem seama de condiţia:

$$x_k \leq \beta_k \tag{1.3.7}$$

Pe de altă parte, din (1.3.5) avem:

$$x_{s_i} = \tilde{x}_i - y_{ik} x_k\,, \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc\,(s_i) \tag{1.3.8}$$

şi deci, valoarea maximă pe care o poate lua x_k trebuie să satisfacă şi condiţiile de mărginire a variabilelor din bază, adică:

$$0 \leq \tilde{x}_i - y_{ik} x_k \leq \beta_{s_i}\,, \quad \forall\, i = \overline{1,m}.$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} x_k &\leq \frac{\tilde{x}_i}{y_{ik}} \quad \text{dacă} \quad y_{ik} > 0, \\ x_k &\leq \frac{\beta_{s_i} - \tilde{x}_i}{-y_{ik}} \quad \text{dacă} \quad y_{ik} < 0, \end{aligned}$$

prin urmare,

$$x_k \leq \rho'_k \stackrel{not}{=} \begin{cases} \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \dfrac{\tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } y_{ik} > 0 \end{cases} \tag{1.3.9}$$

$$x_k \leq \rho''_k \stackrel{not}{=} \begin{cases} \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \dfrac{\tilde{x}_i - \beta_{s_i}}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} < 0 \right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } y_{ik} < 0 \end{cases} \tag{1.3.10}$$

Rezumând relaţiile (1.3.7), (1.3.9) şi (1.3.10), valoarea maximă pe care o poate lua x_k este:

$$x_k = \min\left\{\beta_k, \rho'_k, \rho''_k\right\} \tag{1.3.11}$$

Schimbarea bazei se va efectua diferenţiat, în funcţie de minimul obţinut în (1.3.11).

- Dacă $x_k = \beta_k$, atunci baza B va rămâne aceeaşi, iar $\mathcal{R}^-_{nou} = \mathcal{R}^- \cup \{k\}$ şi $\mathcal{R}^+_{nou} = \mathcal{R}^+ \setminus \{k\}$. Valorile soluţiei şi a funcţiei obiectiv se vor modifica astfel:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{nou} &= \tilde{x} - Y^k \beta_k, \\ \tilde{z}_{nou} &= \tilde{z} - (z_k - c_k)\beta_k \end{aligned}$$

- Dacă $x_k = \rho'_k = \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \dfrac{\tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\tilde{x}_r}{y_{rk}}$, atunci din (1.3.8) rezultă că variabila x_{s_r} devine zero şi va părăsi baza în favoarea lui x_k. Prin urmare, $\mathcal{B}_{nou} = \mathcal{B} \setminus \{s_r\} \cup \{k\}$ şi $\mathcal{R}^+_{nou} = \mathcal{R}^+ \setminus \{k\} \cup \{s_r\}$ şi toate valorile se recalculează cu formulele obişnuite de schimbare a bazei din algoritmul simplex, având pivotul y_{rk}.
- Dacă $x_k = \rho''_k = \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \dfrac{\tilde{x}_i - \beta_{s_i}}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} < 0 \right\} = \dfrac{\tilde{x}_r - \beta_{s_r}}{y_{rk}}$, atunci din (1.3.8) rezultă că variabila x_{s_r} îşi atinge marginea superioară β_{s_r} şi va părăsi baza în favoarea lui x_k. Prin urmare, $\mathcal{B}_{nou} = \mathcal{B} \setminus \{s_r\} \cup \{k\}$ iar $\mathcal{R}^-_{nou} = \mathcal{R}^- \cup \{s_r\}$ şi $\mathcal{R}^+_{nou} = \mathcal{R}^+ \setminus \{k\}$. Recalcularea valorilor soluţiei şi a funcţiei obiectiv se face în baza Lemei substituţiei. La aplicarea formulelor de schimbare a bazei va trebui însă ca mai întâi să înlocuim valoarea $\tilde{x}_r$ din tabloul simplex cu $\tilde{x}_r - \beta_{s_r}$ şi apoi să efectuăm calculele.

Cazul 2: există $k \in \mathcal{R}^-$ pentru care $z_k - c_k < 0$.

Deoarece în acest caz avem $c^T \cdot x = \tilde{z} + (z_k - c_k)\, x_k$, valoarea funcţiei obiectiv va descreşte dacă x_k devine mai mare ca zero. Merită să subliniem faptul că, de astă dată, variaţia în sens crescător a lui x_k reprezintă de fapt descreşterea valorii variabilei k de la marginea ei superioară β_k spre zero, din cauza notaţiei $\left(\beta_j - x_j\right)$ introdusă în (1.3.4).

Evident, trebuie să avem $\beta_k - x_k \geq 0$, de unde rezultă din nou condiţia (1.3.7).

În cazul de faţă, din (1.3.5) deducem:

$$x_{s_i} = \tilde{x}_i + y_{ik} x_k\,, \quad s_i \in \mathcal{B},\ i = loc\,(s_i) \tag{1.3.12}$$

şi ţinând seama de condiţiile de mărginire a variabilelor din bază, obţinem:

$$0 \leq \tilde{x}_i + y_{ik} x_k \leq \beta_{s_i}\,, \quad \forall\, i = \overline{1,m},$$

de unde rezultă:

$$x_k \leq \gamma'_k \stackrel{not}{=} \begin{cases} \displaystyle\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{-\tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} < 0 \right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } y_{ik} < 0 \end{cases} \tag{1.3.13}$$

$$x_k \leq \gamma''_k \stackrel{not}{=} \begin{cases} \displaystyle\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\beta_{s_i} - \tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } y_{ik} > 0 \end{cases} \tag{1.3.14}$$

Rezumând relaţiile (1.3.7), (1.3.13) şi (1.3.14), valoarea maximă pe care o poate lua x_k este:

$$x_k = \min\left\{\beta_k, \gamma'_k, \gamma''_k\right\} \tag{1.3.15}$$

Schimbarea bazei se va efectua diferenţiat şi de astă dată, în funcţie de minimul obţinut în (1.3.15).

- Dacă $x_k = \beta_k$, atunci baza B va rămâne aceeaşi, iar $\mathcal{R}^-_{nou} = \mathcal{R}^- \setminus \{k\}$ şi $\mathcal{R}^+_{nou} = \mathcal{R}^+ \cup \{k\}$. Valorile soluţiei şi a funcţiei obiectiv se vor modifica astfel:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{nou} &= \tilde{x} + Y^k \beta_k, \\ \tilde{z}_{nou} &= \tilde{z} + (z_k - c_k)\, \beta_k \end{aligned}$$

- Dacă $x_k = \gamma'_k = \min\limits_{1\le i\le m}\left\{\frac{-\tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} < 0\right\} = \frac{-\tilde{x}_r}{y_{rk}}$, atunci din (1.3.12) rezultă că variabila x_{s_r} devine zero şi va părăsi baza în favoarea lui x_k. Prin urmare, $\mathcal{B}_{nou} = \mathcal{B}\setminus\{s_r\}\cup\{k\}$ iar $\mathcal{R}^-_{nou} = \mathcal{R}^-\setminus\{k\}$ şi $\mathcal{R}^+_{nou} = \mathcal{R}^+\cup\{s_r\}$. Recalcularea valorilor soluţiei şi a funcţiei obiectiv se face în baza Lemei substituţiei. La aplicarea formulelor de schimbare a bazei, va trebui ca în tabloul simplex să înlocuim pe $\tilde{x}_r$ cu $(-\tilde{x}_r)$ înainte de a efectua calculele în raport cu pivotul y_{rk}.
- Dacă $x_k = \gamma''_k = \min\limits_{1\le i\le m}\left\{\frac{\beta_{s_i} - \tilde{x}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0\right\} = \frac{\beta_{s_r} - \tilde{x}_r}{y_{rk}}$, atunci din (1.3.12) rezultă că variabila x_{s_r} îşi atinge marginea superioară β_{s_r} şi va părăsi baza în favoarea lui x_k. Prin urmare, $\mathcal{B}_{nou} = \mathcal{B}\setminus\{s_r\}\cup\{k\}$ şi $\mathcal{R}^-_{nou} = \mathcal{R}^-\cup\{s_r\}\setminus\{k\}$. Recalcularea valorilor soluţiei şi a funcţiei obiectiv se face în baza Lemei substituţiei. Aplicarea formulelor de schimbare a bazei în tabloul simplex va fi precedată însă de înlocuirea valoarii $\tilde{x}_r$ cu $\beta_{s_r} - \tilde{x}_r$.

Se observă cu uşurinţă că cele două cazuri de schimbare a bazei analizate mai sus prezintă similitudini foarte mari şi prin urmare, se pot trata într-un mod unitar. Pentru aceasta, vom asocia fiecărei variabile x_i un coeficient σ_i definit astfel:

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad i \in \mathcal{B} \\ 1 & \text{dacă} \quad i \in \mathcal{R}^+ \\ -1 & \text{dacă} \quad i \in \mathcal{R}^- \end{cases}$$

Teorema de optimalitate se poate reformula astfel:

Teorema 1.13 (de optimalitate) *Condiţia suficientă ca soluţia de bază extinsă $x \in \mathbb{R}^n$, în raport cu B, să fie optimă pentru problema (1.3.3) este ca, pentru orice $j \in \mathcal{R}$ să avem $\sigma_j(z_j - c_j) \le 0$.*

De asemenea, condiţiile (1.3.9) şi (1.3.13), respectiv (1.3.10) şi (1.3.14) se pot scrie unificat astfel:

$$x_k \le \rho'_k \overset{not}{=} \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le m}\left\{\frac{\tilde{x}_i}{\sigma_k y_{ik}} \;\middle|\; \sigma_k y_{ik} > 0\right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } \sigma_k y_{ik} > 0 \end{cases}$$

$$x_k \leq \rho_k'' \overset{not}{=} \begin{cases} \min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \dfrac{\tilde{x}_i - \beta_{s_i}}{\sigma_k y_{ik}} \;\middle|\; \sigma_k y_{ik} < 0 \right\} \\ +\infty \text{ dacă nu există } \sigma_k y_{ik} < 0 \end{cases}$$

şi atunci, valoarea maximă pe care o poate lua x_k este dată de (1.3.11) pentru ambele cazuri. În mod asemănător se pot prezenta şi calculele pentru schimbarea bazei, dar lăsăm acest lucru în seama cititorului.

Exemplul 1.1 *Să considerăm următoarea problemă:*

$$\min\{3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 12x_5\}$$

în raport cu restricţiile

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 + \; x_5 = 9 \end{cases}$$

şi condiţiile de mărginire

$$0 \leq x_1 \leq 8, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 6, \quad 0 \leq x_5 \leq 3.$$

Se poate observa cu uşurinţă că o soluţie de bază extinsă corespunzătoare lui $B = (A^1 A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este: $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ şi $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Tabloul simplex asociat acestei baze este:

x_1	5	1	0	1	-1	2
x_2	9	0	1	-1	1	1
	24	0	0	1	2	-5
	σ	0	0	1	1	1

Testul de optimalitate nu este satisfăcut: avem, spre exemplu, $\sigma_4(z_4 - c_4) = 2 > 0$. Prin urmare, x_4 va primi valoarea:

$$x_4 = \min\{\beta_4, \rho_4', \rho_4''\} = \min\left\{6, \frac{9}{1}, \frac{5-8}{-1}\right\} = 3 = \rho_4''$$

În această situaţie, după ce $\tilde{x}_1$ se va înlocui cu $\tilde{x}_1 - \beta_1 = -3$, transformarea tabloului simplex se va face cu pivotul $y_{1,4} = -1$. Astfel, tabloul

$x_1 - \beta_1$	-3	1	0	1	$\boxed{-1}$	2
x_2	9	0	1	-1	1	1
	24	0	0	1	2	-5

devine

x_4	3	-1	0	-1	1	-2
x_2	6	1	1	0	0	3
	18	2	0	3	0	-1
	σ	-1	0	1	0	1

Deoarece x_1 este acum o variabilă secundară, având valoarea egală cu marginea ei superioară, avem $x_1 = 8$, iar coeficientul $\sigma_1 = -1$.

Baza curentă este $B = (A^4 A^2)$ şi în raport cu ea, soluţia de bază extinsă este: $x = (8, 6, 0, 3, 0)$.

Această soluţie nu este optimă deoarece avem: $\sigma_3 (z_3 - c_3) = 3 > 0$. Prin urmare, variabila secundară x_3 va primi valoarea

$$x_3 = \min \{\beta_3, \rho_3', \rho_3''\} = \min \left\{ 2, +\infty, \frac{3-6}{-1} \right\} = 2 = \beta_3$$

În acest caz, baza rămâne neschimbată, iar valorile soluţiei şi a funcţiei obiectiv se modifică astfel:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \sigma_3 Y^3 \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{z} = 18 - \sigma_3 (z_3 - c_3) \beta_3 = 18 - 3 \cdot 2 = 12.$$

Deoarece x_3 şi-a atins marginea superioară, $\sigma_3 = -1$, iar tabloul simplex devine:

x_4	5	-1	0	1	1	-2
x_2	6	1	1	0	0	3
	12	2	0	3	0	-1
	σ	-1	0	-1	0	1

De astă dată testul de optimalitate este satisfăcut ($\sigma_j (z_j - c_j) \leq 0$, $\forall j \in \mathcal{R}$) iar soluţia de bază extinsă $x = (8, 6, 2, 5, 0)$ este optimă.

1.4. Dualitate în programarea liniară

De foarte multe ori, abordarea unei probleme reale poate fi făcută în mai multe moduri, fiecare dintre acestea având drept scop rezolvarea ei cât mai eficient cu putinţă. La o analiză mai atentă se constată că, deşi sunt structural diferite, aceste abordări conţin legături profunde între ele. Dacă îndeplinesc anumite condiţii, aceste probleme se numesc duale una alteia. În optimizarea liniară, problemele duale se bucură de proprietăţi foarte bune în ceea ce priveşte caracterizarea soluţiilor şi a valorii optime.

Pentru exemplificare, vom enunţa două probleme care sunt legate de acelaşi gen de activitate, cunoscute sub denumirea de probleme de transport.

Descrierea activităţii. Există două depozite, D_1 şi D_2, în care sunt depozitate 13, respectiv 17 tone de marfă ce trebuie transportată la trei beneficiari: B_1, B_2 şi B_3. Fiecare beneficiar solicită să primească cel puţin 12, 8 şi respectiv 10 tone de marfă. Costul unitar de transport de la fiecare depozit la fiecare beneficiar este dat în tabelul următor:

	B_1	B_2	B_3
D_1	5	2	3
D_2	3	4	2

Problema 1. Să se distribuie marfa din depozite la beneficiari, în aşa fel încât, costul total de transport să fie minim.

Dacă notăm cu x_{ij}, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$, cantitatea ce se transportă de la depozitul D_i la beneficiarul B_j, problema se poate modela ca problemă de programare liniară astfel:

$$\begin{gathered}
\min \{5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23}\} \\
-x_{11} - x_{12} - x_{13} \geq -13 \\
-x_{21} - x_{22} - x_{23} \geq -17 \\
x_{11} + x_{21} \geq 12 \\
x_{12} + x_{22} \geq 8 \\
x_{13} + x_{23} \geq 10 \\
x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\ j = 1,2,3.
\end{gathered}$$

Evident, primele două restricţii (care au fost înmulţite cu -1) exprimă faptul că marfa ce pleacă din depozite nu poate depăşi cantitatea existentă, iar următoarele trei, ca cerinţa beneficiarilor să fie satisfăcută.

Problema 2. Un întreprinzător cumpără marfa din depozitul D_i cu preţul unitar u_i, $i = 1,2$, şi apoi, o revinde beneficiarului B_j la preţul unitar v_j, $j = 1,2,3$. Condiţia prin care este lăsat să facă această afacere este ca diferenţa dintre preţul de vânzare şi cel de cumpărare să nu depăşească, în nici unul din cazuri, costul unitar de transport de la depozitul D_i la beneficiarul B_j. Evident, întreprinzătorul va fi interesat să stabilească preţurile u_i şi v_j în aşa fel încât să obţină un profit maxim. În cazul acesta, problema de programare liniară se poate formula astfel:

$$\begin{gathered}
\max\{-13u_1 - 17u_2 + 12v_1 + 8v_2 + 10v_3\} \\
v_1 - u_1 \le 5 \\
v_2 - u_1 \le 2 \\
v_3 - u_1 \le 3 \\
v_1 - u_2 \le 3 \\
v_2 - u_2 \le 4 \\
v_3 - u_2 \le 2 \\
u_i \ge 0,\ i = 1,2,\ v_j \ge 0,\ j = 1,2,3.
\end{gathered}$$

Problemele enunţate mai sus modelează de fapt aceeaşi activitate, dar abordează modul de rezolvare din două puncte de vedere diferite. Dacă pentru cazul prezentat aici, se aplică rezultatele pe care le vom studia în continuare, se constată că aceste probleme sunt duale una alteia şi că soluţiile lor se află într-o anumită interdependenţă.

1.4.1. Reguli de asociere a problemelor duale

Să considerăm următoarea pereche de probleme de programare liniară în forma generală:

$$\left.\begin{array}{ll}
 & \inf\left\{c_1^\top \cdot x_1 + c_2^\top \cdot x_2 + c_3^\top \cdot x_3\right\} \\
\text{în raport cu} & \\
 & A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\cdot x_2 + A_{13}\cdot x_3 \ge b_1 \\
 & A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\cdot x_2 + A_{23}\cdot x_3 = b_2 \\
 & A_{31}\cdot x_1 + A_{32}\cdot x_2 + A_{33}\cdot x_3 \le b_3 \\
 & \quad x_1 \ge 0 \qquad\qquad x_3 \le 0
\end{array}\right\} \qquad (\mathrm{P}_g)$$

unde datele problemei sunt matricele $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ şi vectorii $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$,

$c_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, şi problema:

$$\left.\begin{array}{ll} & \sup\left\{b_1^\top \cdot u_1 + b_2^\top \cdot u_2 + b_3^\top \cdot u_3\right\} \\ \text{în raport cu} & \\ & A_{11}^\top \cdot u_1 + A_{21}^\top \cdot u_2 + A_{31}^\top \cdot u_3 \leq c_1 \\ & A_{12}^\top \cdot u_1 + A_{22}^\top \cdot u_2 + A_{32}^\top \cdot u_3 = c_2 \\ & A_{13}^\top \cdot u_1 + A_{23}^\top \cdot u_2 + A_{33}^\top \cdot u_3 \geq c_3 \\ & \qquad u_1 \geq \mathbf{0} \qquad\qquad u_3 \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{D}_g)$$

Definiţia 1.4 *Perechea de probleme (P_g) şi (D_g) se numesc probleme duale una alteia.*

Din cauza simetriei în care apar problemele (P_g) şi (D_g), la prima vedere am fi tentaţi să credem că este vorba de două probleme obişnuite de programare liniară, construite cu aceleaşi date, dar puse în altă ordine. Felul în care sunt asociate aceste probleme, confirmă în parte această observaţie, dar legătura dintre ele este cu mult mai profundă. Vom descrie în continuare modul în care sunt asociate problemele duale.

Reguli de asociere.

- Unei probleme de minimizare îi corespunde o problemă de maximizare, şi reciproc.
- Coeficienţii din funcţia obiectiv a unei probleme devin coeficienţii termenului liber în cealaltă problemă, şi reciproc.
- Matricea restricţiilor dintr-o problemă este matricea transpusă din cealaltă problemă, şi reciproc.
- Fiecărei restricţii dintr-o problemă îi corespunde o variabilă în cealaltă problemă, şi reciproc. Relaţia de asociere este următoarea:
  - unei restricţii concordante îi corespunde o variabilă nenegativă (≥ 0), şi reciproc;
  - unei restriţii de tip egalitate îi corespunde o variabilă oarecare (fără condiţii de semn), şi reciproc;

    unei restricţii neconcordante îi corespunde o variabilă nepozitivă (≤ 0), şi reciproc.

De regulă, problema iniţială de la care se porneşte, se consideră a fi **problema primală**, iar cea care i se asociază, este **problema duală**. Se constată cu uşurinţă că aceste reguli de asociere au proprietatea că duala problemei duale este problema primală.

Dacă problema primală este într-una din formele particulare definite la pagina 11, atunci problema duală va fi următoarea:

$$\begin{cases} \text{primala în formă standard:} & \inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{b^\top \cdot u \mid A^\top \cdot u \leq c\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă canonică:} & \inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \\ \text{problema duală:} & \sup\left\{b^\top \cdot u \mid A^\top \cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0}\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{primala în formă mixtă:} & \begin{cases} \inf\left\{c^\top \cdot x\right\} \\ \text{în raprt cu:} \\ \quad \begin{matrix} A_1 \cdot x \geq b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{matrix},\ x \geq \mathbf{0} \end{cases} \\ \text{problema duală:} & \begin{cases} \sup\left\{b_1^\top \cdot u_1 + b_2^\top \cdot u_2\right\} \\ \text{în raprt cu:} \\ \quad A_1^\top \cdot u_1 + A_2^\top \cdot u_2 \leq c, \\ \qquad\qquad u_1 \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{cases}$$

În cazul problemelor canonice, asocierea prin dualitate păstrează ambele problemele în aceeaşi formă, adică, restricţiile rămân concordante şi variabilele nenegative. Din cauza acestei simetrii, studiul proprietăţilor de dualitate le vom face pe acest tip de probleme. Deoarece formele problemelor de programare liniară sunt echivalente, toate rezultatele de dualitate se vor putea aplica fără dificultate în orice situaţie.

1.4.2. Teoreme de dualitate

Considerăm următoarea pereche de probleme duale:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid x \in \mathcal{P}\right\} \tag{P}$$

$$\sup\left\{b^\top \cdot u \mid u \in \mathcal{D}\right\} \tag{D}$$

unde, pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ şi $c \in \mathbb{R}^n$, domeniile de admisibilitate pentru fiecare problemă sunt definite astfel:

$$\mathcal{P} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \geq b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{u \in \mathbb{R}^m \mid A^\top \cdot u \leq c,\ u \geq \mathbf{0}\right\}$$

Propoziţia 1.14 *Dacă domeniile de admisibilitate a problemelor (P) şi (D) sunt nevide, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \neq \emptyset$, atunci, pentru orice $x \in \mathcal{P}$ şi orice $u \in \mathcal{D}$ are loc relaţia: $c^\top \cdot x \geq b^\top \cdot u$.*

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \mathcal{P}$ şi orice $u \in \mathcal{D}$, avem:

$$\left.\begin{array}{r} A \cdot x - b \geq \mathbf{0} \\ u \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \implies u^\top \cdot A \cdot x \geq u^\top \cdot b,$$

$$\left.\begin{array}{r} x \geq \mathbf{0} \\ A^\top \cdot u - c \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \implies x^\top \cdot A^\top \cdot u \leq x^\top \cdot c.$$

De aici rezultă evident: $c^\top \cdot x \geq u^\top \cdot A \cdot x \geq u^\top \cdot b$. ■

Observaţia 1.9 *În condiţiile Propoziţiei 1.14, pentru orice $x \in \mathcal{P}$, valoarea $c^\top \cdot x$ este o margine superioară a tuturor valorilor funcţiei obiectiv a problemei (D) şi prin urmare, aceasta are un optim finit. Totodată, deoarece pentru orice $u \in \mathcal{D}$ valoarea $b^\top \cdot u$ este o margine inferioară a problemei (P), aceasta are de asemenea un optim finit.*

Propoziţia 1.15 *Dacă $\mathcal{P} \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ şi există $\bar{x} \in \mathcal{P}$, $\bar{u} \in \mathcal{D}$ astfel încât $c^\top \cdot \bar{x} = b^\top \cdot \bar{u}$, atunci, $\bar{x}$ este o soluţie optimă a problemei (P) şi $\bar{u}$ este o soluţie optimă a problemei (D).*

Demonstraţie. Să presupunem, spre exemplu, că $\bar{x}$ nu este o soluţie optimă a problemei (P). Atunci, există $x_0 \in \mathcal{P}$, astfel încât $c^\top \cdot x_0 < c^\top \cdot \bar{x}$. Dar, ţinând seama de condiţia din enunţ, obţinem $c^\top \cdot x_0 < b^\top \cdot \bar{u}$, ceea ce contrazice Propoziţia 1.14. Prin urmare, $\bar{x}$ este soluţie optimă a problemei (P). Analog se demonstrează proprietatea şi pentru $\bar{u}$. ■

Teorema 1.16 (Teorema fundamentală a dualităţii) *Fiind dată perechea de probleme duale (P) şi (D), doar una din următoarele situaţii se poate realiza:*

1. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \neq \emptyset$. În cazul acesta, există $\tilde{x} \in \mathcal{P}$ şi $\tilde{u} \in \mathcal{D}$ soluţii optime pentru (P), respectiv (D), astfel încât $c^\top \cdot \tilde{x} = b^\top \cdot \tilde{u}$.
2. $\mathcal{P} = \emptyset$ şi $\mathcal{D} = \emptyset$.
3. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} = \emptyset$ sau $\mathcal{P} = \emptyset$ şi $\mathcal{D} \neq \emptyset$. În cazul acesta, problema care are soluţii admisibile, are optimul infinit.

Demonstraţie. Să considerăm următoarea matrice pătratică de ordinul $n+m+1$:

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -A^\top & c \\ A & \mathbf{0}_m & -b \\ -c^\top & b^\top & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\mathbf{0}_n$ şi $\mathbf{0}_m$ sunt matrice pătratice nule de ordinul n, respectiv m. Avem evident $S = -S^\top$ şi deci, putem aplica Teorema 1.2: există $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n+m+1}$, $\bar{z} \geq \mathbf{0}$, astfel încât $S \cdot \bar{z} \geq \mathbf{0}$ şi $S \cdot \bar{z} + \bar{z} > \mathbf{0}$. Dacă grupăm componentele lui $\bar{z}$ şi le notăm $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \\ r \end{pmatrix}$, unde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ şi $r \in \mathbb{R}$, atunci avem:

$$\bar{x} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{u} \geq \mathbf{0}, \quad r \geq 0, \tag{1.4.1}$$

$$\begin{aligned} -A^\top \cdot \bar{u} + cr &\geq \mathbf{0}, & (1.4.2)\\ A \cdot \bar{x} - br &\geq \mathbf{0}, & (1.4.3)\\ -c^\top \cdot \bar{x} + b^\top \cdot \bar{u} &\geq 0, & (1.4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} - A^\top \cdot \bar{u} + cr &> \mathbf{0}, & (1.4.5)\\ A \cdot \bar{x} + \bar{u} - br &> \mathbf{0}, & (1.4.6)\\ -c^\top \cdot \bar{x} + b^\top \cdot \bar{u} + r &> 0. & (1.4.7) \end{aligned}$$

Deoarece $r \geq 0$, putem considera două cazuri: $r > 0$ şi $r = 0$.

În cazul $r > 0$, puntem defini:

$$\tilde{x} = \frac{1}{r}\bar{x} \quad \text{şi} \quad \tilde{u} = \frac{1}{r}\bar{u}. \tag{1.4.8}$$

Din (1.4.1) rezultă $\tilde{x} \geq \mathbf{0}$ şi $\tilde{u} \geq \mathbf{0}$. Împărţind relaţiile (1.4.2) şi (1.4.3) prin r, obţinem:

$$A \cdot \tilde{x} \geq b \quad \text{şi} \quad A^\top \cdot \tilde{u} \leq c$$

şi astfel, $\tilde{x} \in \mathcal{P}$ şi $\tilde{u} \in \mathcal{D}$. Din Propoziţia 1.14, avem:

$$c^\top \cdot \tilde{x} \geq b^\top \cdot \tilde{u}$$

şi dacă împărţim relaţia (1.4.4) prin r, obţinem

$$c^\top \cdot \tilde{x} \leq b^\top \cdot \tilde{u}.$$

Din ultimele două relaţii rezultă: $c^\top \cdot \tilde{x} = b^\top \cdot \tilde{u}$. Condiţiile Propoziţiei 1.15 fiind îndeplinite, rezultă că $\tilde{x}$ este soluţie optimă a problemei (P) şi $\tilde{u}$ este soluţie optimă a problemei (D). Prin urmare, în cazul acesta este realizată situaţia de la punctul 1.

În cazul $r = 0$, vom arăta mai întâi că nu putem avea $\mathcal{P} \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Presupunem prin absurd că există $x_0 \in \mathcal{P}$ şi $u_0 \in \mathcal{D}$. Ţinând seama de (1.4.1), avem:

$$\left.\begin{array}{r} A \cdot x_0 - b \geq \mathbf{0} \\ \bar{u} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \implies \bar{u}^\top \cdot b \leq \bar{u}^\top \cdot A \cdot x_0 \leq 0, \tag{1.4.9}$$

deoarece, din (1.4.2) avem $A^\top \cdot \bar{u} \leq \mathbf{0}$. Pe de altă parte,

$$\left.\begin{array}{r} \bar{x} \geq \mathbf{0} \\ A^\top \cdot u_0 - c \leq \mathbf{0} \end{array}\right\} \implies \bar{x}^\top \cdot c \geq \bar{x}^\top \cdot A^\top \cdot u_0 \geq 0,$$

deoarece, din (1.4.3) avem $A \cdot \bar{x} \geq \mathbf{0}$. Din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\bar{x}^\top \cdot c \geq 0 \geq \bar{u}^\top \cdot b,$$

care este în contradicţie cu (1.4.7).

Prin urmare, nu putem avea decât, fie $\mathcal{P} = \emptyset$ şi $\mathcal{D} = \emptyset$, caz în care este realizată situaţia de la punctul 2., fie doar una dintre mulţimile $\mathcal{P}$ sau $\mathcal{D}$ este nevidă, caz în care este realizată situaţia de la punctul 3. Pentru cazul din urmă, vom arăta că problema care admite soluţii are optim infinit. Dacă presupunem, spre exemplu, că există $x_0 \in \mathcal{P}$, atunci vom considera vectorul

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda \bar{x},$$

definit pentru parametrul real $\lambda \geq 0$. Avem evident $x(\lambda) \geq \mathbf{0}$ şi

$$A \cdot x(\lambda) = A \cdot x_0 + \lambda A \cdot \bar{x} \geq A \cdot x_0 \geq b.$$

Deci, pentru orice $\lambda \geq 0$, avem $x(\lambda) \in \mathcal{P}$.

Dacă ţinem seama de relaţia (1.4.7) şi de faptul că în acest caz are loc şi (1.4.9), obţinem:

$$c^\top \cdot \bar{x} < b^\top \cdot \bar{u} \leq \bar{u}^\top \cdot A \cdot x_0 \leq 0.$$

Prin urmare, avem:

$$\lim_{\lambda \to \infty} c^\top \cdot x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(c^\top \cdot x_0 + \lambda c^\top \cdot \bar{x}\right) = -\infty,$$

adică, problema (P) are optim infinit. În mod analog se poate arăta că, dacă există $u_0 \in \mathcal{D}$, atunci problema (D) are optim infinit. ■

Teorema 1.17 (Teorema tare a ecarturilor complementare) *Dacă $\mathcal{P} \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \neq \emptyset$, atunci, pentru perechea de probleme (P) şi (D), există soluţiile optime $\tilde{x}$, respectiv $\tilde{u}$, astfel încât:*

$$\begin{aligned} (A \cdot \tilde{x} - b) + \tilde{u} &> \mathbf{0}, \\ \left(c - A^{\top} \cdot \tilde{u}\right) + \tilde{x} &> \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. În condiţiile date, ne situăm în cazul 1. al Teoremei fundamentale a dualităţii. Din demonstraţia acesteia, rezultă că putem construi soluţiile optime $\tilde{x}$ şi $\tilde{u}$, date de (1.4.8). Împărţind relaţiile (1.4.5) şi (1.4.6) prin $r > 0$, obţinem condiţiile din enunţ. ■

Teorema 1.18 (Teorema slabă a ecarturilor complementare)

Fie $x \in \mathcal{P}$ şi $u \in \mathcal{D}$. Vectorul x este o soluţe optimă pentru (P) şi u este o suluţie optimă pentru (D), dacă şi numai dacă, sunt satisfăcute relaţiile:

$$\begin{aligned} u^{\top} \cdot (A \cdot x - b) &= 0, \\ x^{\top} \cdot \left(c - A^{\top} \cdot u\right) &= 0. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Pentru a arăta ca are loc implicaţia directă, presupunem x şi u soluţii optime pentru (P), respectiv (D). Din Teorema fundamentală a dualităţii rezultă: $c^{\top} \cdot x - b^{\top} \cdot u = 0$. Dacă în membrul stâng adăugăm şi scădem $u^{\top} \cdot A \cdot x$, $\left(= x^{\top} \cdot A^{\top} \cdot u\right)$, şi regrupăm termenii, obţinem:

$$u^{\top} \cdot (A \cdot x - b) + x^{\top} \cdot \left(c - A^{\top} \cdot u\right) = 0.$$

Deoarece x şi u sunt soluţii admisibile pentru problemele respective, ambii termeni din suma de mai sus sunt nenegativi şi deci, fiecare termen trebuie să fie egal cu zero.

Pentru a arăta implicaţia reciprocă, adunăm membru cu membru relaţiile din enunţ. Obţinem $c^{\top} \cdot x = b^{\top} \cdot u$. Deoarece $x \in \mathcal{P}$ şi $u \in \mathcal{D}$, condiţiile Propoziţiei 1.15 sunt îndeplinite şi rezultă că x şi u sunt soluţii optime pentru (P), respectiv (D). ■

Teoremele ecarturilor complementare pun în evidenţă legătura dintre o pereche de soluţii optime şi modul în care sunt satisfăcute restricţiile cuplului de probleme duale (P) şi (D). Astfel, din Teorema tare a ecarturilor complementare rezultă că, dacă la optim o restricţie este *activă* (adică este satisfăcută prin egalitate), atunci componenta corespunzătoare a soluţiei duale este pozitivă. De asemenea, dacă o componentă a soluţiei optime este zero, atunci restricţia corespunzătoare prin dualitate este *pasivă* (sau neactivă, adică, ea este satisfăcută printr-o inegalitate strictă).

Reciproc, din Teorema slabă a ecarturilor complementare rezultă că la optim, unei componente pozitive a soluţiei îi corespunde prin dualitate o restricţie activă, iar unei restricţii pasive, o componentă nulă a soluţiei asociate prin dualitate.

1.5. Algoritmul simplex dual

Să considerăm problema de programare liniară în forma standard şi duala ei:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \tag{P}$$
$$\sup\left\{b^\top \cdot u \mid A^\top \cdot u \leq c\right\} \tag{D}$$

şi presupunem că dispunem de o bază optimă B a lui (P). În conformitate cu Teorema de optimalitate a algoritmului simplex sunt îndeplinite relaţiile:

$$\begin{aligned} \bar{x} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0} &\qquad \text{(primal-admisibilitatea lui } B\text{)} \\ c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1} \cdot A \leq c^\top &\qquad \text{(condiţia de optimalitate)} \end{aligned}$$

Din condiţia de optimalitate, dacă notăm vectorul

$$\bar{u}^\top = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1},$$

rezultă că $\bar{u}$ este o soluţie admisibilă a problemei duale (D). Pe de altă parte, valoarea optimă a problemei (P), corespunzătoare soluţiei de bază, este dată de:

$$\bar{z} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot \bar{x} = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1} \cdot b = \bar{u}^\top \cdot b.$$

În baza Propoziţiei 1.15, deducem că $\bar{u}$ este o soluţie optimă a problemei (D).

Prin urmare, cu ajutorul unei baze optime B, putem descrie soluţiile de bază optime pentru ambele probleme (P) şi (D).

Pentru o matrice de bază B, care partiţionează coloanele lui $A = (B \vdots R)$, definim următoarea noţiune:

Definiţia 1.5 *Matricea de bază B se numeşte* ***dual admisibilă****, dacă are loc relaţia:*

$$c_B^\top \cdot B^{-1} \cdot A \leq c^\top$$

Cu ajutorul acestei noţiuni, teorema de optimalitate a algoritmului simplex poate fi enunţată într-o nouă formă.

Teorema 1.19 (de optimalitate) *Dacă baza B este primal şi dual admisibilă, atunci ea este optimă pentru problemele (P) şi (D).*

În raport cu noţiunile de primal şi dual admisibilitate a unei baze B, putem observa că în algoritmul simplex, descris la pagina 23, se explorează un şir de baze primal admisibile până când se obţine una, care este şi dual admisibilă, sau se pune în evidenţă că problema are optim infinit. Din această cauză, procedeul acesta se numeşte algoritmul simplex "*primal*".

În cele ce urmează, vom expune un procedeu care va explora un şir de baze dual admisibile până când, fie se obţine una care este şi primal admisibilă (deci optimă), fie se pune în evidenţă că problema duală are optim infinit şi atunci, în baza Teoremei fundamentale a dualităţii, problema (P) nu are soluţii. Algoritmul care se obţine prin acest procedeu se numeşte **algoritmul simplex dual**.

În continuare, vom folosi aceleaşi notaţii pe care le-am utilizat cu prilejul expunerii algoritmului simplex, descris la pagina 23.

Teorema 1.20 (a domeniului vid) *Fie B o bază dual admisibilă. Dacă există o componentă $\bar{x}_i < 0$, pentru care $y_{ij} \geq 0$, $\forall\ j = \overline{1,n}$, atunci problema (P) nu are soluţii.*

Demonstraţie. Fie vectorul $\bar{u}^\top = c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1}$ şi notăm cu B_i^{-1} linia "i" a matricei B^{-1}. Definim vectorul:

$$u^\top(\lambda) = \bar{u}^\top - \lambda B_i^{-1}.$$

unde $\lambda \geq 0$ este un parametru real. Pentru orice $j = \overline{1,n}$, avem:

$$\begin{aligned} u^\top(\lambda) \cdot A^j &= \bar{u}^\top \cdot A^j - \lambda B_i^{-1} \cdot A^j = \\ &= z_j - \lambda y_{ij} \geq z_j \geq c_j \end{aligned}$$

deoarece B este dual admisibilă. De aici rezultă că pentru orice $\lambda \geq 0$, vectorul $u(\lambda)$ este o soluţie admisibilă pentru (D).

Valoarea funcţiei obiectiv corespunzătoare este:

$$u^\top(\lambda) \cdot b = \bar{u}^\top \cdot b - \lambda B_i^{-1} \cdot b = \bar{z} - \lambda \bar{x}_i$$

şi deoarece $\bar{x}_i < 0$, rezultă $\lim\limits_{\lambda \to \infty} u^\top(\lambda) \cdot b = \infty$. Prin urmare, problema (D) are optim infinit şi în baza Teoremei fundamentale a dualităţii, problema (P) nu are soluţii. ■

Teorema 1.21 (de schimbare a bazei) *Fie B o bază dual admisibilă şi componenta $\bar{x}_r < 0$, pentru care există $j \in \mathcal{R}$, astfel ca $y_{rj} < 0$. Dacă alegem indicele $k \in \mathcal{R}$, astfel încât :*

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_{j \in \mathcal{R}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\} \tag{1.5.1}$$

atunci, matricea $\tilde{B}$, obţinută din B prin înlocuirea coloanei A^{s_r} cu A^k (unde indicele $s_r \in \mathcal{B}$, cu $loc(s_r) = r$), este o matrice de bază dual admisibilă, pentru care avem: $\tilde{z} = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^\top \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b \geq c_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1} \cdot b = \bar{z}$.

Demonstraţie. Din relaţia (1.5.1) avem evident $y_{rk} < 0$. Din Lema substituţiei rezultă că $\tilde{B}$ este o matrice nesingulară. Pentru a vedea că ea este o matrice de bază dual admisibilă, trebuie să verificăm că pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, avem $\tilde{z}_j - c_j = c_{\tilde{\mathcal{B}}}^\top \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot A^j - c_j \leq 0$. Aplicând formula (1.2.15), avem:

$$\tilde{z}_j - c_j = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)\, y_{rj}}{y_{rk}}.$$

Deoarece B este dual admisibilă, pentru orice $j = \overline{1,n}$, avem $z_j - c_j \leq 0$. Prin urmare, dacă $y_{rj} \geq 0$, din relaţia de mai sus rezultă evident $\tilde{z}_j - c_j \leq 0$. Dacă $y_{rj} < 0$, ţinând seama de (1.5.1), putem scrie:

$$\tilde{z}_j - c_j = y_{rj}\left(\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\right) \leq 0.$$

În concluzie, $\tilde{B}$ este bază dual admisibilă.

Ultima afirmaţie a teoremei rezultă din formula (1.2.14):

$$\tilde{z} = \bar{z} - \frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}}\bar{x}_r \geq \bar{z}.$$

■

Observaţia 1.10 *Prin schimbarea de bază, avem:* $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\setminus\{s_r\}\cup\{k\}$ *şi* $loc(k) = r$.

Algoritmul simplex dual.

Pasul 0. Se determină (dacă există) o bază **dual admisibilă** B şi se calculează B^{-1}.

Pasul 1. Se calculează: $\bar{x} = B^{-1}\cdot b$, $\bar{z} = c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot\bar{x}$, $Y = B^{-1}\cdot A$, $z^{\top} - c^{\top} = c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot Y - c^{\top}$.

Pasul 2. (testul de optimalitate) Dacă $\bar{x} \geq \mathbf{0}$, atunci $\bar{z}$ este valoarea optimă, iar $x_{\mathcal{B}} = \bar{x}$ şi $x_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$ este soluţia de bază optimă a problemei (P). STOP.

Pasul 3. (testul de domeniu vid) Dacă există $\bar{x}_i < 0$ astfel încât $y_{ij} \geq 0$ pentru orice $j = \overline{1,n}$, atunci problema (P) nu are soluţii. STOP.

Pasul 4. (schimbarea bazei) Se alege $\bar{x}_r < 0$ şi din ralaţia (1.5.1) se determină $k \in \mathcal{R}$. Se formează matricea $\tilde{B}$, care se obţine din B prin înlocuirea coloanei A^{s_r} cu A^k (unde indicele $s_r \in \mathcal{B}$, iar $loc(s_r) = r$), se calculează $\tilde{B}^{-1}$ cu formula (1.2.4), şi cu această inversă a noii matrice de bază se revine la Pasul 1.

Există metode pentru determinarea bazelor dual admisibile (vezi, spre exemplu, [37, p. 44]), pe care însă nu le mai prezentăm aici. Un argument în sprijinul acestei decizii ar fi că, în practică, de cele mai multe ori, bazele dual admisibile se obţin în mod natural din cele optime, după ce acestea îşi pierd primal admisibilitatea în urma unor schimbări ce intervin fie în datele problemei, fie în structura lor.

Se observă cu uşurinţă că algoritmul simplex dual lucrează cu aceleaşi elemente ca şi cel primal. Din această cauză, organizarea calculelor pentru aplicarea lui la rezolvarea manuală a problemelor de programare liniară, se poate face folosind tabloul simplex standard sau cel revizuit.

Capitolul 2

Metode de descompunere

2.1. Introducere

Rezolvarea problemelor de programare liniară de dimensiuni mari prezintă numeroase dificultăţi din cauza prelucrării anevoioase a datelor, pe de o parte, iar pe de altă parte, din cauza acumulării erorilor de rotunjire ce se fac inevitabil pe parcursul iteraţiilor algoritmului simplex. Din fericire însă, majoritatea problemelor de acest fel au o structură specială a restricţiilor, matricea coeficienţilor având o formă "bloc-unghiulară", ce se poate reprezenta astfel:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & & A_k \\ D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & & \\ & & & D_k \end{pmatrix}$$

unde $A_i \in \mathbb{R}^{m_0 \times n_i}$ şi $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$, $1 \leq i \leq k$.

Dacă ar lipsi cele m_0 "restricţii de cuplare" definite prin elementele matricelor A_i, $1 \leq i \leq k$, atunci problema de programare liniară s-ar descompune în k probleme independente, fiecare având matricea de restricţii D_i, $1 \leq i \leq k$. Rezultă că în această situaţie, am putea opta între a rezolva o singură problemă mare, având matricea restricţiilor de dimensiune $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\right) \times \left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\right)$, sau de a rezolva k probleme mai mici, fiecare având matricea de restricţii de dimensiune $m_i \times n_i$. Evident, cea de-a doua opţiune este mai convenabilă, deoarece se lucrează cu probleme care au un volum de date mai mic.

Plecând de la această idee, în perioada anilor '60-'70, s-au elaborat o serie de metode care abordează problemele de dimensiuni mari, cu matricea restricţiilor în formă bloc-unghiulară, prin rezolvarea unei succesiuni de probleme liniare de dimensiuni cu mult mai mici.

2.2. Principiul de descompunere Dantzig-Wolfe

Dantzig şi Wolfe [8] au fost primii care au publicat în 1960 un algoritm de descompunere pentru problemele de programare liniară. Procedeul devine eficient dacă este aplicat la probleme liniare cu restricţiile în formă bloc-unghiulară. Principiul de rezolvare constă în construirea unui "program principal" care este echivalent cu problema iniţială şi care are un număr de linii doar cu o unitate mai mare decât numărul restricţiilor de cuplare. Pe de altă parte însă, numărul de coloane devine foarte mare. dar acestea nu trebuie tabelate de la început, ci se "generează" în momentul în care ele sunt necesare în aplicarea algoritmului simplex. O iteraţie a algoritmului constă din două etape: în prima etapă, se rezolvă un număr de subprobleme independente; în a doua etapă, se rezolvă programul principal în care se introduc rezultatele obţinute prin rezolvarea subproblemelor.

2.2.1. Rezultate preliminare

Justificarea algoritmului Dantzig-Wolfe se bazează pe unele noţiuni şi rezultate din teoria generală a analizei convexe (vezi, spre exemplu, Rockafellar [32], Karlin [18]).

Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă.

Definiţia 2.1 *Vom spune că $x \in X$ este un punct extrem al mulţimii X, dacă pentru orice $a \in X$ şi $b \in X$, $a \neq b$, avem $x \neq \lambda a + (1-\lambda) b$, oricare ar fi $\lambda \in (0,1)$.*

Mulţimea punctelor extreme ale lui X o vom nota cu $Ext\,(X)$.

Observaţia 2.1 *Orice soluţie de bază a unei probleme de programare liniară este un punct extrem al domeniului de admisibilitate.*

Teorema 2.1 *Dacă $y \notin X$ atunci există un hiperplan care separă punctul y de mulţimea X.*

Definiţia 2.2 *Un "hiperplan de sprijin" a mulţimii convexe X are proprietatea că X se află de o parte a sa şi cel puţin un punct al lui X este conţinut în hiperplan.*

Teorema 2.2 *Dacă X este o mulţime convexă, atunci orice hiperplan de sprijin la X conţine un punct extrem al lui X.*

Definiţia 2.3 *Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime oarecare. Acoperirea convexă $Co(M)$ a lui M este cea mai mică mulţime convexă ce conţine pe M.*

Teorema 2.3 *Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă şi compactă. Atunci $Co(Ext(X)) = X$.*

Demonstraţie. Vom arăta mai întâi că $Co(Ext(X)) \subseteq X$. Pentru orice $y \in Co(Ext(X))$, există puncte $x^i \in Ext(X)$ astfel încât

$$y = \sum_i \lambda_i x^i, \quad \text{cu } \lambda_i \geq 0 \text{ şi } \sum_i \lambda_i = 1.$$

Deoarece $x^i \in X$ şi mulţimea X este convexă, rezultă că $y \in X$.

Pentru a arăta că $Co(Ext(X)) \supseteq X$, vom presupune prin absurd că există $y \in X$, astfel ca $y \notin Co(Ext(X))$. Cu alte cuvinte, y nu poate fi descris ca o combinaţie convexă de puncte extreme ale lui X. În aceste condiţii, conform Teoremei 2.1, exită un hiperplan $a^\top \cdot x = b$ ($a \in \mathbb{R}^n$ şi $b \in \mathbb{R}$) care separă punctul y de mulţimea $Co(Ext(X))$, adică,

$$a^\top \cdot y \geq b \quad \text{şi} \tag{2.2.1}$$

$$a^\top \cdot x < b \quad \text{pentru orice } x \in Co(Ext(X)) \tag{2.2.2}$$

Deoarece X este compactă, există $b_0 = \max\left\{a^\top \cdot x \mid x \in X\right\}$. Prin urmare, $a^\top \cdot x \leq b_0$ pentru orice $x \in X$ şi deci, $a^\top \cdot x = b_0$ este un hiperplan de sprijin a lui X. În baza Teoremei 2.2, rezultă că există un punct extrem $\bar{x} \in Ext(X)$, astfel încât $a^\top \cdot \bar{x} = b_0$. Dar această relaţie este în contradicţie cu (2.2.2), deoarece, din alegerea lui b_0 şi (2.2.1), avem $b_0 \geq b$. ■

Teorema 2.3 poate fi enunţată şi într-o formă diferită, care este mai adecvată pentru aplicarea ei în elaborarea metodei de descompunere.

Corolarul 2.4 *Fie mulţimea* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\, x \geq \mathbf{0}\}$ *nevidă şi mărginită, şi fie* $Ext(X) = \{x^i, 1 \leq i \leq r\}$. *Atunci, orice element* $x \in X$ *poate fi scris sub forma:*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i, \text{ unde } \lambda_i \geq 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Extinderea acestui rezultat la cazul în care X nu este mărginită este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.5 *Fie mulţimea* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\, x \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset$. *Atunci* $x \in X$, *dacă şi numai dacă* x *poate fi scris ca o combinaţie convexă de puncte extreme ale lui* X, *plus o combinaţie liniară nenegativă de raze extreme (soluţii nenule ale sistemului omogen) ale lui* X, *adică*

$$x = \sum_i \lambda_i x^i \tag{2.2.3}$$

unde

$$\sum_i \delta_i \lambda_i = 1\,, \quad \lambda_i \geq 0 \tag{2.2.4}$$

şi

$$\delta_i = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{ după cum } x^i \text{ este } \left\{ \begin{matrix} \text{punct extrem} \\ \text{rază extremă} \end{matrix} \right\} \text{ a lui } X. \tag{2.2.5}$$

2.2.2. Principiul de descompunere

Să considerăm pentru început o problemă de programare liniară în care restricţiile sunt grupate în două părţi:

$$\inf\ c^{\top} \cdot x$$

în raport cu

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b_0 \quad (m_0 \text{ restricţii}) \\ D \cdot x &= b \quad\ \ (m \text{ restricţii}) \\ x &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{m_0 \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ şi $b \in \mathbb{R}^m$. Este evident că orice problemă de programare liniară se poate scrie în această formă.

Vom presupune că poliedrul convex

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid D \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\}$$

este mărginit şi mulţimea punctelor sale extreme este

$$Ext\,(S) = \left\{ x^j ,\ 1 \leq j \leq r \right\}.$$

În baza Corolarului 2.4, oricare ar fi $x \in S$, avem:

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j x^j, \text{ unde } \lambda_j \geq 0 \text{ şi } \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1. \tag{2.2.6}$$

Problema iniţială se poate formula astfel: să se determine $x \in S$ astfel încât să fie satisfăcute restricţiile $A \cdot x = b_0$ şi să se realizeze minimul lui $c^\top \cdot x$. Dacă ţinem seama de (2.2.6) şi notăm:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= c^\top \cdot x^i \\ \alpha^i &= A \cdot x^i \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

atunci, problema iniţială se poate rescrie în funcţie de variabilele λ_i astfel:

$$\left.\begin{array}{ll} & \inf \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \gamma_j \lambda_j \\ \text{în raport cu} & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \alpha^j \lambda_j = b_0 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq r \end{array}\right\} \tag{PP}$$

Problema (PP) se numeşte "program principal" şi este echivalent cu problema iniţială. Remarcăm că programul principal are doar $m_0 + 1$ restricţii, faţă de $m_0 + m$ cât are problema iniţială, iar acest lucru reprezintă o restrângere a dimensiunii în cazul în care m este mare. În schimb, numărul de coloane este egal cu numărul punctelor extreme a mulţimii S, care poate fi considerabil de mare. Acest lucru însă nu devine un impediment în rezolvarea programului principal deoarece, pentru aplicarea algoritmului simplex, nu trebuie să cunoaştem decât acele coloane care formează baza curentă şi cel mult încă o coloană, care eventual urmează să fie introdusă în noua bază.

Pentru a determina o bază primal admisibilă a programului principal, se poate folosi o metodă de fază 1, după ce s-au determinat un număr $l \geq m_0 + 1$ de puncte extreme ale mulţimii S. La rândul lor, punctele extreme se pot obţine printr-o procedură de fază 1 aplicată restricţiilor $\{D \cdot x = b, x \geq \mathbf{0}\}$, urmată de un număr de iteraţii de schimbare a bazei, cu respectarea criteriului din algoritmul simplex.

Fie B o bază primal admisibilă a programului principal, $\mathcal{B}$ mulţimea indicilor de bază şi $u^\top = \gamma_{\mathcal{B}}^\top \cdot B^{-1}$, vectorul multiplicatorilor simplex corespunzători acestei baze. Pentru a vedea dacă această bază este optimă, trebuie să calculăm

$$u^\top \cdot \begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_s = \max_j \left\{ u^\top \cdot \begin{pmatrix} \alpha^j \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_j \right\} \tag{2.2.8}$$

Dacă partiţionăm vectorul $u^\top = \left(u_0^\top, u_1\right)$, cu $u_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ şi $u_1 \in \mathbb{R}$, şi ţinem seama de notaţiile (2.2.7), atunci avem:

$$u^\top \cdot \begin{pmatrix} \alpha^j \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_j = \left(u_0^\top, u_1\right) \cdot \begin{pmatrix} A \cdot x^j \\ 1 \end{pmatrix} - c^\top \cdot x^j = \left(u_0^\top \cdot A - c^\top\right) \cdot x^j + u_1$$

Prin urmare, determinarea maximului în relaţia (2.2.8) se poate scrie

$$\max_j \left\{ u^\top \cdot \begin{pmatrix} \alpha^j \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_j \right\} = \max_{x^j \in Ext(S)} \left\{ \left(u_0^\top \cdot A - c^\top\right) \cdot x^j \right\} + u_1 \tag{2.2.9}$$

Reamintim că x^j este un punct extrem al lui S şi observăm că expresia de maximizat în (2.2.9) este liniară în x^j. Deoarece o soluţie optimă a unei probleme liniare, cu domeniul de admisibilitate mărginit, este întotdeauna şi un punct extrem al acestei mulţimi, maximizarea din (2.2.9) este echivalentă cu subproblema

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \left(u_0^\top \cdot A - c^\top\right) \cdot x \mid D \cdot x = b, x \geq \mathbf{0} \right\} \tag{2.2.10}$$

Rezolvând această subproblemă, se obţine o soluţie x^s pentru care valoarea maximă din relaţia (2.2.8), pe care o vom nota cu Δ, este

$$\Delta = u^\top \cdot \begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} - \gamma_s = \left(u_0^\top \cdot A - c^\top\right) \cdot x^s + u_1$$

Dacă $\Delta \leq 0$, atunci baza B este optimă pentru programul principal şi $\bar{\lambda} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ este soluţia optimă corespunzătoare. Soluţia optimă pentru problema iniţială se obţine acum din relaţia (2.2.6):

$$\tilde{x} = \sum_{i \in B} \bar{\lambda}_i x^i$$

Dacă $\Delta > 0$, atunci coloana care intră în bază este $\alpha^s = \begin{pmatrix} A \cdot x^s \\ 1 \end{pmatrix}$, cu coeficientul de cost $\gamma_s = c^\top \cdot x^s$. Efectuând acum o operaţie de schimbare a bazei în programul principal, obţinem o nouă bază primal admisibilă şi calculele se reiau cu testul de optimalitate a acesteia.

Acest procedeu de rezolvare devine deosebit de atractiv dacă este aplicat la probleme cu o structură bloc-unghiulară a restricţiilor, de forma următoare:

$$\left.\begin{array}{l}
\inf\left\{c_1^\top \cdot \mathbf{x}_1 + c_2^\top \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + c_k^\top \cdot \mathbf{x}_2\right\} \\
\\
\begin{array}{lllll}
A_1 \cdot \mathbf{x}_1 + & A_2 \cdot \mathbf{x}_2 + & \cdots & +A_k \cdot \mathbf{x}_k & = b_0 \\
D_1 \cdot \mathbf{x}_1 & & & & = b_1 \\
 & D_2 \cdot \mathbf{x}_2 & & & = b_2 \\
 & & & & \vdots \\
 & & & D_k \cdot \mathbf{x}_k & = b_k
\end{array} \\
\\
\qquad \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k},\ k > 0.
\end{array}\right\} \qquad \text{(PBU)}$$

unde, pentru orice $i = \overline{1,k}$, avem $A_i \in \mathbb{R}^{m_0 \times n_i}$, $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$, $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ şi $b_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$.

Pentru problema bloc-unghiulară (PBU), subproblema (2.2.10) devine:

$$\max\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} u_0^\top \cdot A_i - c_i^\top\right) \cdot \mathbf{x}_i \,\middle|\, D_i \cdot \mathbf{x}_i = b_i,\ \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k}.\right\} \tag{2.2.11}$$

Deoarece în (2.2.11) funcţia obiectiv este aditiv separabilă în $\mathbf{x}_i$ iar resricţiile sunt independente în raport cu $\mathbf{x}_i$, această problemă se reduce la rezolvarea a k subprobleme independente:

$$\max_{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \left\{ \left(u_0^\top \cdot A_i - c_i^\top\right) \cdot \mathbf{x}_i \;\middle|\; D_i \cdot \mathbf{x}_i = b_i,\ \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0} \right\}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.2.12}$$

În baza principiului de descompunere Dantzig-Wolfe prezentat mai sus, putem enunţa următorul algoritm pentru rezolvarea problemei bloc-unghiulare (PBU). Vom presupune că avem la dispoziţie o bază primal admisibilă B a programului principal (PP) şi multiplicatorii simplex $u^\top = \left(u_0^\top, u_1\right)$ corespunzători.

Algoritmul de descompunere Dantzig-Wolfe.

Pasul 0: Se determină o bază primal admisibilă B pentru programul principal (PP) şi multiplicatorii simplex $u^\top = \left(u_0^\top, u_1\right)$ corespunzători.

Pasul 1: Folosind multiplicatorii simplex u_0, se rezolvă subproblemele (2.2.12), obţinând soluţiile $\bar{\mathbf{x}}_i\left(u_0\right)$, $i = \overline{1,k}$.

Pasul 2: Se calculează

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \left(u_0^\top \cdot A_i - c_i^\top\right) \cdot \bar{\mathbf{x}}_i\left(u_0\right) + u_1$$

Dacă $\Delta \leq 0$, atunci soluţia optimă pentru (PBU) este

$$\tilde{x} = \sum_{i \in \mathcal{B}} \lambda_i x^i \tag{2.2.13}$$

unde x^i sunt punctele extreme ale mulţimii

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{k} n_i} \;\middle|\; \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \right\} \tag{2.2.14}$$

corespunzătoare soluţiilor de bază λ_i . STOP.

Pasul 3: Dacă $\Delta > 0$, se formează coloana

$$\begin{pmatrix} \alpha^s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} A_i \mathbf{x}_i\left(u_0\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

care printr-o operaţie de schimbare a bazei din algoritmul simplex va fi introdusă într-o nouă bază primal admisibilă pentru (PP) şi în mod corespunzător, se obţine un nou vector al multiplicatorilor simplex. După aceasta, se revine la Pasul 1.

Observaţia 2.2 *Dacă programul principal are toate soluţiile de bază nedegenerate, atunci fiecare iteraţie va produce o descreştere strictă a funcţiei obiectiv. Deoarece există un număr finit de baze posibile şi nici una nu se poate repeta, principiul de descompunere va determina soluţia optimă într-un număr finit de iteraţii.*

Observaţia 2.3 *Trebuie subliniat faptul că soluţia optimă $\bar{x}$ a problemei (PBU) nu este neapărat una dintre cele obţinute la rezolvarea subproblemelor (2.2.12). Din (2.2.13) rezultă că $\bar{x}$ este o anumită combinaţie convexă a unui număr de astfel de soluţii. Prin urmare, programul principal nu poate obţine optimul global pur şi simplu prin trimiterea "preţurilor" corespunzătoare lui u_0 către subprobleme; el trebuie să combine soluţiile subproblemelor într-un plan general. În acest sens, descompunerea lui Dantzig şi Wolfe nu este o "descentralizare" completă a procesului de luare a deciziei. Din această cauză, Dantzig* [7, capitolul 23] *a denumit această descompunere "planificare centralizată fără informaţie completă la centru".*

Programul principal restrâns.

Principiul de descompunere Dantzig-Wolfe, în forma prezentată mai sus, rezolvă probleme de optimizare doar în prima etapă (subproblemele (2.2.12)), în timp ce în etapa a doua, se execută doar o singură operaţie de schimbare a bazei. Se poate da însă o formulare mai simetrică a acestei metode, astfel ca în ambele etape să se rezolve probleme de optimizare. Pentru aceasta, în locul programului principal (PP), vom considera un "program principal restrâns", format doar din coloanele care formează baza curentă în (PP) şi coloana care urmează să fie introdusă în noua bază. Astfel, programul principal restrâns este:

$$\left.\begin{array}{ll} & \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\lambda_i+\gamma\lambda\right\} \\ \text{în raport cu} & \\ & \sum_{i=1}^{m}\alpha^i\lambda_i+\alpha\lambda=b_0 \\ & \sum_{i=1}^{m}\lambda_i+\lambda=1 \\ & \lambda_i\geq 0,\ i=\overline{1,m},\quad \lambda\geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(PPR)}$$

unde $m = m_0+1$, λ_i sunt variabilele de bază curente şi λ este variabila care intră în noua bază, având coeficientul de cost redus

$$u_0^\top\cdot\alpha+u_1-\gamma>0.$$

Evident, rezolvarea acestei probleme este echivalentă cu iteraţia de schimbare a bazei prezentată în algoritmul de descompunere.

Utilitatea unui program principal restrâns va fi pusă în evidenţă în cele ce urmează.

Variante pentru descompunerea primală.

Există diferite moduri în care se poate descompune problema iniţială, fiecare modalitate influenţând forma programului principal şi a programului principal restrâns.

Pentru orice $i=\overline{1,k}$, considerăm poliedrul convex

$$S_i=\{x\in\mathbb{R}^{n_i}\mid D_i\cdot x=b_i,\ x\geq\mathbf{0}\} \qquad (2.2.15)$$

şi notăm punctele sale extreme cu $x_i^j\in Ext\,(S_i)$. Astfel, orice punct $\mathbf{x}_i\in S_i$ poate fi scris sub forma unei combinaţii convexe de puncte extreme: $\mathbf{x}_i=\sum_j\lambda_j x_i^j$. Înlocuind în (PBU), obţinem următorul program principal:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{în raport cu} & \begin{array}{ll}
\inf \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j}\gamma_{ij}\lambda_{ij} & \\[2ex]
\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j}\alpha_i^j\lambda_{ij} = b_0 & \text{(r-1)} \\
\displaystyle\sum_{j}\lambda_{ij} = 1, \quad i=\overline{1,k} & \text{(r-2)} \\
\lambda_{ij} \geq 0. &
\end{array}
\end{array}\right\} \quad \text{(PP+)}$$

unde $\gamma_{ij} = c_i^\top \cdot x_i^j$ şi $\alpha_i^j = A_i \cdot x_i^j$.

Această problemă diferă de (PP) prin aceea că are k linii de convexitate (r-2) în loc de una şi fiecare subsistem $\{D_i \cdot \mathbf{x}_i = b_i, \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}\}$, este reprezentat separat printr-o mulţime de variabile λ_{ij} (anterior, toate subsistemele erau agregate împreună).

Pentru rezolvarea problemei (PP+), să considerăm o bază primal admisibilă B de dimensiune $(m_0+k)\times(m_0+k)$ şi fie $u^\top = \left(u_0^\top, u_1^\top\right)$ multiplicatorii simplex corespunzători, unde $u_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ este asociat restricţiilor de cuplare (r-1), iar $u_1 = (u_{11}, ..., u_{1k})^\top \in \mathbb{R}^k$ condiţiilor de convexitate (r-2). Coeficientul de cost relativ corespunzător variabilei λ_{ij} este

$$\Delta_{ij} = \left(u_0^\top \cdot A_i - c_i^\top\right) \cdot x_i^j + u_{1i}$$

Pentru i fixat, problema găsirii valorii

$$\bar{z}_i = \max_j \Delta_{ij}$$

este echivalentă cu rezolvarea subproblemei

$$\bar{z}_i = \max_{x\in\mathbb{R}^{n_i}} \left\{\left(u_0^\top \cdot A_i - c_i^\top\right) \cdot x \mid D_i \cdot x = b_i,\ x \geq \mathbf{0}\right\}$$

care este aceeaşi ca în (2.2.12). Dacă

$$\max_{1\leq i\leq k}\max_j \Delta_{ij} = \max_{1\leq i\leq k}\{\bar{z}_i + u_{1i}\} \leq 0,$$

atunci soluţia curentă este optimă. Dacă nu, coloana care intră în bază este aceea care realizează

$$\max_{1\leq i\leq k}\{\bar{z}_i + u_{1i}\} = \bar{z}_s + u_{1s} > 0$$

Dacă $\bar{x}_s(u_0)$ este soluţia optimă a subproblemei s, atunci coloana care intră în bază va fi

$$\begin{pmatrix} A_s \cdot \bar{x}_s(u_0) \\ e^s \end{pmatrix} \tag{2.2.16}$$

unde $e^s \in \mathbb{R}^k$ este un vector unitar, având pe poziţia s valoarea 1 şi zero în rest.

Este posibil ca să existe şi alţi indici i, pentru care $\bar{z}_i + u_{1i} > 0$ şi în plus, după ce s-a obţinut noua bază ce conţine coloana (2.2.16), aceste costuri reduse să rămână pozitive şi în raport cu baza nouă. Acestă observaţie este o motivaţie puternică pentru a forma un nou program principal restrâns, în care să se adauge câte o coloană α_i^* pentru fiecare subsistem independent:

$$\left.\begin{array}{l} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in\mathcal{B}} \gamma_{ij}\lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \lambda_i^* \right\} \\ \text{în raport cu} \\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in\mathcal{B}} \alpha_i^j \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \lambda_i^* = b_0 \\ \sum_{j\in\mathcal{B}} \lambda_{ij} + \lambda_i^* = 1\,, \quad i = \overline{1,k} \\ \lambda_{ij} \geq 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1,k},\ j \in \mathcal{B} \end{array}\right\} \quad (\text{PPR+})$$

Această problemă are k variabile λ_i^*, corespunzătoare restricţiilor de convexitate, şi în comparaţie cu (PPR), dimensiunea bazei a crescut de la $m_0 + 1$ la $m_0 + k$. Acest inconvenient este însă compensat de perspectiva de a obţine o descreştere mai mare a funcţiei obiectiv, în urma efectuării mai multor iteraţii simplex care se vor face la rezolvarea lui (PPR+).

Observaţia 2.4 *Programul principal restrâns (PPR) are o singură linie de convexitate, grupând împreună toate blocurile diagonale, spre deosebire de (PPR+) care are k linii de convexitate, tratând fiecare bloc separat. Evident, alte grupări ale acestor blocuri conduc la programe principale care pot avea un număr de linii de convexitate cuprins între 1 şi k. Considerarea unor astfel de cazuri intermediare este impus de cele mai multe ori de particularităţile problemei care urmează a fi rezolvată.*

Observaţia 2.5 *Dacă ipoteza de mărginire a poliedrelor convexe S_i (definite în (2.2.15)) nu este îndeplinită, atunci utilizarea Corolarului 2.4 trebuie înlocuită cu Teorma 2.5. Razele extreme care apar în descrierea unui punct $x \in S_i$ sunt soluţii nenule ale sistemului omogen*

$$D_i \cdot x = \mathbf{0},\ x \geq \mathbf{0}$$

şi sunt în număr finit. Dacă o subproblemă are optim infinit, algoritmul simplex pune în evidenţă o rază extremă (vezi Observaţia 1.3 de la pagina 19). Principiul de descompunere se aplică şi în acest caz, prin substituirea lui (2.2.3) în restricţiile de cuplare şi funcţia obiectiv a problemei (PBU). Singura diferenţă în programul principal (PP) este înlocuirea restricţiei de convexitate $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ cu (2.2.4) şi (2.2.5), scrise relativ la mulţimea S, care este definită de (2.2.14).

2.2.3. Exemplu de aplicare a principiului de descompunere

Vom considera următoarea problemă:

$$\inf\left\{-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3y_1 - 2y_2 - 4y_3\right\}$$

în raport cu

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2y_1 & +3y_2 & -y_3 & = 10 \\
4x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & & = 2 \\
x_1 & +x_2 & +2x_3 & & & & = 5 \\
& & & y_1 & -y_2 & +3y_3 & = 0 \\
& & & y_1 & +y_2 & -y_3 & = 2
\end{array}$$

$$x_i \geq 0,\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Această problemă are o restricţie de cuplare şi două blocuri independente. Pentru a utiliza pe deplin programul principal restrâns, vom considera două restricţii de convexitate. Notăm:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{x \in \mathbb{R}^3_+ \mid 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2,\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5\right\} \\
S_2 &= \left\{y \in \mathbb{R}^3_+ \mid y_1 - y_2 + 3y_3 = 0,\ y_1 + y_2 - y_3 = 2\right\}
\end{aligned}$$

Fie $x \in S_1$ şi $y \in S_2$. În baza Corolarului 2.4 putem scrie:

$$x = \sum_j x^j \lambda_j \quad \text{şi} \quad y = \sum_j y^j \mu_j \tag{2.2.17}$$

unde $x^j \in Ext(S_1)$ şi $y^j \in Ext(S_2)$, iar λ_j şi μ_j sunt parametrii combinaţiilor convexe respective.

Grupăm coeficienţii funcţiei obiectiv şi a restricţiei de cuplare în felul următor:

$$\begin{aligned} c_1^\top &= (-1,-3,2), \quad c_2^\top = (3,-2,-4) \\ A_1 &= (1,2,-1), \quad A_2 = (-2,3,-1) \end{aligned}$$

Cu aceste notaţii, programul principal se poate scrie astfel:

$$\inf\left\{\sum_j \left(c_1^\top \cdot x^j\right)\lambda_j + \sum_j \left(c_2^\top \cdot y^j\right)\mu_j\right\}$$

în raport cu

$$\begin{aligned} \sum_j (A_1 \cdot x^j)\,\lambda_j \quad + \sum_j (A_2 \cdot y^j)\,\mu_j &= 10 \\ \sum_j \lambda_j \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ \sum_j \mu_j &= 1 \end{aligned}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j.$$

Va trebui mai întâi să identificăm o bază primal admisibilă a programului principal. Pentru aceasta, avem nevoie de trei puncte extreme ale poliedrelor S_1 şi S_2, convenabil alese. Vom considera, spre exemplu, $x^1 \in Ext(S_1)$, $x^1 = (2,3,0)^\top$, obţinut prin rezolvarea sistemului ce defineşte pe S_1, luând pe x_1, x_2 variabile principale şi variabila secundară $x_3 = 0$. Analog, determinăm pentru cel de al doilea bloc pe $y^1 \in Ext(S_2)$ şi $y^2 \in Ext(S_2)$, $y^1 = (1,1,0)^\top$ şi $y^2 = (0,3,2)^\top$.

Cu ajutorul acestor puncte extreme putem explicita trei coloane ale programului principal. Avem:

$$c_1^\top \cdot x^1 = (-1,-3,2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -11;$$

$$\begin{aligned}
A_1 \cdot x^1 &= (1,2,-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = 8;\\
c_2^\top \cdot y^1 &= 1; \quad c_2^\top \cdot y^2 = -10;\\
A_2 \cdot y^1 &= 1; \quad A_2 \cdot y^2 = 8.
\end{aligned}$$

Astfel, o explicitare incompletă a programului principal se poate scrie astfel:

$$\inf\left\{-11\lambda_1 + \mu_1 - 10\mu_2 + \sum\cdots\right\}$$

în raport cu

$$\begin{array}{lllll}
8\lambda_1 & +\mu_1 & +8\mu_2 & +\sum\cdots & = 10\\
\lambda_1 & & & +\sum\cdots & = 1\\
 & \mu_1 & +\mu_2 & +\sum\cdots & = 1\\
 & \multicolumn{3}{l}{\lambda_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad \forall j.}
\end{array}$$

Matricea $B = \begin{pmatrix}8&1&8\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ se dovedeşte a fi o bază primal admisibilă pentru programul principal, iar tabloul simplex revizuit corespunzător acestei baze este:

λ_1	1	0	1	0	
μ_1	6/7	-1/7	8/7	8/7	
μ_2	1/7	1/7	-8/7	-1/7	
	-81/7	-11/7	11/7	18/7	

Multiplicatorii simplex se află pe ultima linie a tabloului şi în notaţiile noastre sunt:

$$u_0 = \frac{-11}{7}, \quad u_{11} = \frac{11}{7}, \quad u_{12} = \frac{18}{7}.$$

Iteraţia 1.

Pasul 1. Rezolvăm subproblemele (2.2.12):

$$\begin{aligned}
\bar{z}_1 &= \max\left\{\left(u_0^\top \cdot A_1 - c_1^\top\right)\cdot x \mid x \in S_1\right\} =\\
&= \max\left\{\frac{-4}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3 \mid x \in S_1\right\} = \frac{-10}{7}
\end{aligned}$$

cu soluţia optimă $\bar{x}(u_0) = (1,0,2)^\top$.

$$\bar{z}_2 = \max\left\{\left(u_0^\top \cdot A_2 - c_2^\top\right)\cdot y \mid y \in S_2\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{7}y_1 - \frac{19}{7}y_2 + \frac{39}{7}y_3 \mid y \in S_2\right\} = \frac{-18}{7}$$

cu o soluţie optimă $\bar{y}(u_0) = (1,1,0)^\top$.

Pasul 2. Determinăm

$$\max_{i=1,2}\{\bar{z}_i + u_{1i}\} = \max\left\{\frac{-10}{7} + \frac{11}{7}, \frac{-18}{7} + \frac{18}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$

Pasul 3. Coloana care va fi introdusă în bază este:

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot \bar{x}(u_0) \\ e^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iar tabloul simplex revizuit devine:

λ_1	1	0	1	0	1
μ_1	6/7	-1/7	8/7	8/7	$\boxed{\mathbf{9/7}}$
μ_2	1/7	1/7	-8/7	-1/7	-9/7
	-81/7	-11/7	11/7	18/7	1/7

Efectuând operaţiile de schimbare a bazei cu pivotul $\frac{9}{7}$, obţinem:

λ_1	1/3	1/9	1/9	-8/9	
λ_2	2/3	-1/9	8/9	8/9	
μ_2	1	0	0	1	
	-35/3	-14/9	13/9	22/9	

Multiplicatorii simplex pentru baza curentă sunt:

$$u_0 = \frac{-14}{9};\ u_{11} = \frac{13}{9};\ u_{12} = \frac{22}{9}$$

Iteraţia 2.

Pasul 1. Rezolvăm subproblemele (2.2.12):

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= \max\left\{\left(u_0^\top \cdot A_1 - c_1^\top\right) \cdot x \mid x \in S_1\right\} = \\ &= \max\left\{\frac{-5}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 - \frac{4}{9}x_3 \mid x \in S_1\right\} = \frac{-13}{9}\end{aligned}$$

cu o soluţie optimă $\bar{x}(u_0) = (2,3,0)^{\top}$.

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= \max\left\{\left(u_0^{\top}\cdot A_2 - c_2^{\top}\right)\cdot y \mid y\in S_2\right\} = \\ &= \max\left\{\frac{1}{9}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{50}{9}y_3 \mid y\in S_2\right\} = \frac{-22}{9}\end{aligned}$$

cu soluţia optimă $\bar{y}(u_0) = (0,3,1)^{\top}$.

Pasul 2. Deoarece

$$\max_{i=1,2}\{\bar{z}_i + u_{1i}\} = \max\left\{\frac{-13}{9}+\frac{13}{9}, \frac{-22}{9}+\frac{22}{9}\right\} = 0$$

am obţinut soluţia optimă. Valoarea optimă a problemei iniţiale este cea obţinută în ultimul tablou simplex şi este egală cu $\frac{-35}{3}$, iar soluţia optimă se calculează cu formulele (2.2.17):

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\\ \tilde{x}_3\end{pmatrix} = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ 1\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_3\end{pmatrix} = \mu_1 y^1 + \mu_2 y^2 = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$$

unde parametrii combinaţiilor convexe sunt soluţiile optime ale programului principal.

2.3. Metode de partiţionare şi relaxare

În numeroase situaţii, problemele de dimensiuni mari se prezintă cu o structură bloc diagonală în care legătura dintre blocuri se realizează atât prin restricţii de cuplare, cât şi prin variabile de cuplare. Să considerăm problema următoare, care are blocurile cuplate în ambele moduri:

$$\boxed{\inf\left\{c_1^{\top}\cdot x^1 + c_2^{\top}\cdot x^2 + \ldots + c_k^{\top}\cdot x^k + c_0^{\top}\cdot y\right\}} \tag{2.3.1}$$

în raport cu:

$$\boxed{A_1 \cdot x^1 + A_2 \cdot x^2 + \ldots + A_k \cdot x^k + G_0 \cdot y = b_0} \tag{2.3.2}$$

$$\boxed{\begin{array}{llllll} D_1 \cdot x^1 & & & +G_1 \cdot y & = b_1 \\ & D_2 \cdot x^1 & & +G_2 \cdot y & = b_2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & D_k \cdot x^k & +G_k \cdot y & = b_k \end{array}} \tag{2.3.3}$$

$$\boxed{x^i \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k}, \quad y \geq \mathbf{0}} \tag{2.3.4}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme se poate aplica principiul de descompunere Dantzig-Wolfe. Dacă problema are numai variabile de cuplare, atunci procedeul Dantzig-Wolfe poate fi aplicat dualei, care are numai restricţii de cuplare. Dacă sunt prezente atât variabile cât şi restricţii de cuplare, atunci restricţiile se pot partiţiona în (2.3.2) şi (2.3.3). Restricţiile (2.3.2) vor fi folosite la programul principal, iar (2.3.3) pentru subproblemă. Deoarece subproblema are formă dual-unghiulară, ea poate fi rezolvată direct, sau prin aplicarea din nou a aloritmului Dantzig-Wolfe asupra dualei. În consecinţă, problema (2.3.1)-(2.3.4) poate fi rezolvată cu principiul de descompunere Dantzig-Wolfe, care se foloseşte într-un algoritm în care o iteraţie este structurată pe trei nivele: două nivele pentru rezolvarea subproblemei, şi al treilea nivel, pentru rezolvarea programului principal. Deoarece o astfel de iteraţie este destul de complexă, pot apare unele dificultăţi cauzate în special de faptul că metoda Dantzig-Wolfe converge deseori foarte lent.

Problema (2.3.1)-(2.3.4) poate fi abordată şi într-un mod diferit, şi anume, prin partiţionarea variabilelor în două submulţimi, variabilele de cuplare y şi variabilele bloc x^i. Variabilele x^i sunt din nou partiţionate în mulţimi dependente şi independente, în raport cu matricele de bază ale blocurilor D_i. Această partiţionare permite ca restricţiile bloc şi variabilele dependente să fie eliminate din program, obţinându-se o problemă redusă, de dimensiuni mai mici. Astfel de metode se numesc "de partiţionare şi relaxare". Se foloseşte termenul de relaxare deoarece, prin eliminarea variabilelor dependente, se pierde controlul asupra condiţiilor de nenegativitate ale acestora.

Conceptul de relaxare a restricţiilor a fost plasat de Geoffrion [12] într-un cadru general, care permite o mai bună înţelegere a aplicării lui la aceste metode.

2.3.1. Principiul de relaxare

Să considerăm problema convexă:

$$\inf\left\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i = \overline{1,m};\ x \in S \subseteq \mathbb{R}^n\right\} \tag{P}$$

unde f şi g_i sunt funcţii convexe definite pe mulţimea convexă S. Vom presupune că numărul de restricţii este suficient de mare ca să producă dificultăţi în rezolvarea problemei şi că la optim, un număr relativ mic de restricţii sunt active. În aceste condiţii, o strategie rezonabilă de rezolvare constă în relaxarea (adică, eliminarea temporară) a unor restricţii şi considerarea unei probleme noi, formată doar cu restricţiile rămase. Dacă această problemă este neadmisibilă, la fel va fi şi cea iniţială. Dacă aceasta are o soluţie optimă care satisface şi restricţiile eliminate, atunci soluţia va fi optimă şi pentru problema iniţială. Dacă o parte din restricţiile relaxate nu sunt satisfăcute, atunci un anumit număr dintre acestea vor fi luate în considerare pentru a defini o nouă problemă şi procedeul se repetă.

Geoffrion [12] a formalizat aceasă idee după cum urmează. Fie $\mathcal{M} = \{1, 2, ..., m\}$; se notează cu $\mathcal{R}$ o submulţime a lui $\mathcal{M}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, şi considerăm problema redusă:

$$\inf\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{R};\ x \in S\} \tag{P$_R$}$$

Presupunem că poate fi găsită o mulţime iniţială $\mathcal{R}$ astfel încât problema redusă (P$_R$) să aibe un infimum finit şi că acesta este atins.

Algoritmul general de partiţionare şi relaxare:

Pasul 0: Se ia $\bar{f} = -\infty$ şi se alege o mulţime iniţială $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ astfel încât f să fie inferior mărginită în raport cu restricţiile problemei reduse (P$_R$).

Pasul 1: Se rezolvă problema (P_R). Dacă aceasta nu admite soluţii, atunci evident şi problema (P) este neadmisibilă. STOP.
În caz contrar, se obţine o soluţie optimă $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$.

Pasul 2: Dacă $g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) \leq 0$, pentru $i \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{R}$, atunci soluţia $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este optimă şi pentru problema iniţială (P). STOP.

Pasul 3: În caz contrar, fie

$$\mathcal{V} \subseteq \left\{i \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{R} \mid g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) > 0\right\}$$

o submulţime ce conţine cel puţin un indice al unei restricţii nesatisfăcute şi fie

$$\mathcal{U} = \left\{i \in \mathcal{R} \mid g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) < 0\right\}.$$

Pasul 4: Dacă $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) = \bar{f}$, atunci $\mathcal{R}$ se înlocuieşte prin $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}$ şi se revine la Pasul 1.

Pasul 5: Dacă $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) > \bar{f}$, atunci $\mathcal{R}$ se înlocuieşte prin $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, $\bar{f}$ se înlocuieşte cu $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)$ şi se revine la Pasul 1.

Acest algoritm adaugă una sau mai multe restricţii încălcate şi, dacă $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)$ creşte, atunci elimină acele restricţii din $\mathcal{R}$ care nu sunt active în $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$. Faptul că nu elimină nici o restricţie în cazul în care $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) = \bar{f}$, garantează, după cum vom arăta în continuare, că rezolvarea problemei (P) se termină într-un număr finit de iteraţii.

Propoziţia 2.6 *Fie $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ o soluţie optimă a problemei reduse (P_R). Dacă $g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) \leq 0$ pentru orice $i \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{R}$, atunci $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este o soluţie optimă şi pentru problema (P).*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ nu este o soluţie optimă a lui (P). Fie deci $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $g_i(\bar{x}) \leq 0$ pentru orice $i \in \mathcal{M}$ şi

$$f(\bar{x}) < f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right).$$

Definim

$$x(\lambda) = \lambda \tilde{x}^{\mathcal{R}} + (1-\lambda)\bar{x}, \quad \lambda \in [0,1).$$

Pentru orice $i \in \mathcal{M}$ şi $\lambda \in [0,1)$ avem:

$$g_i(x(\lambda)) = g_i\left(\lambda \tilde{x}^{\mathcal{R}} + (1-\lambda)\bar{x}\right) \leq \lambda g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) + (1-\lambda) g_i(\bar{x}) \leq 0$$

şi astfel $x(\lambda)$ este o soluţie admisibilă a problemei (P_R). În această situaţie, avem:

$$f(x(\lambda)) \leq \lambda f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) + (1-\lambda) f(\bar{x}) < f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right),$$

ceea ce contrazice optimalitatea lui $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ în problema (P_R). ■

Propoziţia 2.6 se poate demonstra şi altfel: deoarece $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$, avem evident

$$\begin{aligned} f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) &= \inf\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{R}\} \leq \\ &\leq \inf\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{M}\} \end{aligned}$$

Pe de altă parte, deoarece $g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) \leq 0$ şi pentru $i \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{R}$, rezultă că $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este soluţie admisibilă pentru problema (P). Prin urmare, avem

$$\inf\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{M}\} \leq f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)$$

şi deci, din relaţia precedentă obţinem:

$$\inf\{f(x) \mid g_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{M}\} = f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right).$$ •

Propoziţia 2.7 *Dacă $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este o soluţie optimă a problemei reduse (P_R) şi se elimină restricţiile din $\mathcal{U}$, atunci $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este o soluţie optimă şi pentru problema ($P_{R\setminus U}$). În plus, dacă $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este unica soluţie optimă a lui (P_R), atunci ea este unică şi pentru ($P_{R\setminus U}$).*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există $x_0 \in S$ astfel încât $g_i(x_0) \leq 0$ pentru $i \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{U}$ şi

$$f(x_0) < f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right). \tag{2.3.5}$$

Considerăm punctele $x(\lambda)$ de pe segmentul de dreaptă cu extremităţile $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ şi x_0 :

$$x(\lambda) = \lambda x_0 + (1-\lambda)\tilde{x}^{\mathcal{R}}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Deoarece S este convexă, $x(\lambda) \in S$ pentru orice $\lambda \in (0,1)$.

Funcţiile g_i fiind convexe, avem:

$$g_i(x(\lambda)) \leq \lambda g_i(x_0) + (1-\lambda) g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) \tag{2.3.6}$$

Pentru $i \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{U}$ rezultă evident $g_i(x(\lambda)) \leq 0$, pentru orice $\lambda \in (0,1)$, deoarece $g_i(x_0) \leq 0$ şi $g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) = 0$.

Pentru $i \in \mathcal{U}$, avem $g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) < 0$. Prin urmare, dacă $g_i(x_0) \leq 0$, din (2.3.6) rezultă din nou $g_i(x(\lambda)) \leq 0$, pentru orice $\lambda \in (0, 1)$. Dacă însă $g_i(x_0) > 0$, putem alege λ_0 astfel încât:

$$0 < \lambda_0 \leq \min_{i \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{-g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)}{g_i(x_0) - g_i\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)} \;\middle|\; g_i(x_0) > 0 \right\} < 1$$

şi din (2.3.6) rezultă $g_i(x(\lambda_0)) \leq 0$. Astfel, $g_i(x(\lambda_0)) \leq 0$, pentru orice $i \in \mathcal{R}$.

În concluzie, $x(\lambda_0)$ este o soluţie admisibilă pentru (P_R). Din convexitatea funcţiei f şi (2.3.5), rezultă:

$$f(x(\lambda_0)) \leq \lambda_0 f(x_0) + (1 - \lambda_0) f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) < f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right).$$

Această relaţie contrazice însă optimalitatea lui $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ în problema (P_R). Deci, $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este o soluţie optimă a problemei ($P_{R\setminus U}$).

Pentru unicitate, dacă presupunem că mai există o soluţie optimă x_0 a lui ($P_{R\setminus U}$), adică $f(x_0) = f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)$, dar $x_0 \neq \tilde{x}^{\mathcal{R}}$, atunci, repetând raţionamentul de mai înainte, obţinem că $x(\lambda_0) \neq \tilde{x}^{\mathcal{R}}$ este o soluţie optimă a lui (P_R). Însă acest fapt contrazice unicitatea lui $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$. ∎

Propoziţia 2.8 *Dacă $\tilde{x}^{\mathcal{R}}$ şi $\tilde{x}^{\mathcal{R}'}$ sunt soluţiile optime a două subprobleme obţinute prin relaxare, unde $\mathcal{R}'$ este determinat la Pasul 4 sau 5 al algoritmului, atunci*

$$f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) \leq f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}'}\right).$$

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}$, atunci afirmaţia propoziţiei este evidentă. Pentru cazul $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$, folosind Propoziţia 2.7, avem:

$$f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) = f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}\setminus\mathcal{U}}\right) \leq f\left(\tilde{x}^{(\mathcal{R}\setminus\mathcal{U})\cup\mathcal{V}}\right),$$

ceea ce era de demonstrat. ∎

Observaţia 2.6 *Convexitatea funcţiilor f şi g_i, precum şi cea a mulţimii S, permit eliminarea restricţiilor neactive. În absenţa convexităţii restricţiilor g_i, Propoziţia 2.8 rămâne adevărată numai dacă restricţiile se adaugă (cazul $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{V}$), fără ca vreuna să fie eliminată.*

Propoziţia 2.9 *Algoritmul de partiţionare şi relaxare se termină într-un număr finit de iteraţii.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea de indici $\mathcal{M}$ este finită, ea are doar un număr finit de submulţimi distincte. Atâta timp cât valorile optime $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right)$ ale subproblemelor $(\mathrm{P}_{\mathcal{R}})$ cresc de la o iteraţie la alta, nici o submulţime de indici nu se poate repeta. Deoarece în cazul când $f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}}\right) = f\left(\tilde{x}^{\mathcal{R}'}\right)$, nici o restricţie nu se elimină şi se adaugă cel puţin una, valoarea optimă a subproblemelor generate rămâne constantă numai pentru un număr finit de iteraţii. Astfel, algorimul se termină într-un număr finit de iteraţii, fie la Pasul 1, fie la Pasul 2 (posibil ca $\mathcal{R} = \mathcal{M}$). ■

În cele ce urmează, vom aplica această metodă generală de partiţionare şi relaxare, la problemele liniare cu restricţiile bloc-unghiulare.

2.3.2. Algoritmul lui Ritter

Ritter [31] a elaborat un procedeu de partiţionare pentru probleme liniare care au matricea restricţiilor în formă bloc-diagonală, blocurile fiind unite atât prin restricţii de cuplare cât şi prin variabile de cuplare. La fiecare iteraţie variabilele problemei se partiţioneaza în două submulţimi: o multime S_1 în care condiţiile de nenegativitate sunt relaxate şi o multime S_2 în care acestea sunt impuse. În momentul în care variabilele din S_1 devin nenegative, soluţia curentă este optimă. Procesul iterativ porneşte de la o partiţie iniţială care se modifică până când se găseşte o partiţie optimă.

Problema pe care o vom studia în continuare se enunţă astfel:

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{k} c_i^{\top} \cdot x^i + c_0^{\top} \cdot y\right\} \tag{2.3.7}$$

în raport cu:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i \cdot x^i + G_0 \cdot y = b_0 \tag{2.3.8}$$

$$D_i \cdot x^i + G_i \cdot y = b_i\,, \quad i = \overline{1,k} \tag{2.3.9}$$

$$x^i \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k}, \quad y \geq \mathbf{0}. \tag{2.3.10}$$

Datele problemei au următoarele dimensiuni:

$$\begin{aligned} A_i &\in \mathbb{R}^{m_0 \times n_i}, \quad D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, \quad i = \overline{1,k}, \\ G_i &\in \mathbb{R}^{m_i \times n_0}, \quad c_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad b_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = \overline{0,k}. \end{aligned}$$

Vom presupune că $rang\,(D_i) = m_i$, pentru orice $i = \overline{1,k}$. Această ipoteză nu restrânge generalitatea problemei deoarece, în cazul în care $rang\,(D_i) < m_i$, putem introduce variabile artificiale pentru a obţine rangul dorit. Acestor variabile li se vor atribui în funcţia obiectiv coeficienţi de cost suficient de mari astfel încât, în cazul unei soluţii optime, valoarea tuturor variabilelor artificiale să fie zero.

De asemenea, vom presupune cunoscut un vector iniţial $y^0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $y^0 \geq \mathbf{0}$, astfel încât, pentru orice $i = \overline{1,k}$, sistemul

$$D_i \cdot x^i = b_i - G_i \cdot y^0$$

să fie compatibil. (Evident, dacă nu există un astfel de vector y^0, atunci problema nu are soluţii.)

În aceste condiţii, pentru fiecare $i = \overline{1,k}$, vom considera subproblema

$$\inf \left\{ c_i^\top \cdot x^i \mid D_i \cdot x^i = b_i - G_i \cdot y^0, \quad x^i \geq \mathbf{0} \right\}. \tag{2.3.11}$$

Prin rezolvarea acestei subprobleme se obţine matricea de bază B_i (care poate fi cea optimă, sau o bază primal admisibilă care indică o direcţie spre $-\infty$). Astfel, coloanele matricei D_i se pot partiţiona în două: $D_i = \left(B_i \,\vdots\, R_i \right)$ şi folosind notaţiile obişnuite, din (2.3.9) obţinem:

$$x_{\mathcal{B}_i} = B_i^{-1} \cdot b_i - B_i^{-1} \cdot R_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} - B_i^{-1} \cdot G_i \cdot y\,. \tag{2.3.12}$$

Funcţia obiectiv (2.3.7) şi restricţiile de cuplare (2.3.8) se pot rescrie şi ele în raport cu partiţionarea respectivă:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(c_{\mathcal{B}_i}^\top \cdot x_{\mathcal{B}_i} + c_{\mathcal{R}_i}^\top \cdot x_{\mathcal{R}_i} \right) + c_0^\top \cdot y$$

$$\sum_{i=1}^{k} (A_{\mathcal{B}_i} \cdot x_{\mathcal{B}_i} + A_{\mathcal{R}_i} \cdot x_{\mathcal{R}_i}) + G_0 \cdot y = b_0$$

Dacă înlocuim pe $x_{\mathcal{B}_i}$ din (2.3.12) în relaţiile de mai sus, obţinem problema redusă:

$$\left.\begin{array}{ll} & \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}_i} + \gamma_0^{\top} \cdot y \right\} + \alpha \\ \text{în raport cu} & \\ & \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} + M_0 \cdot y = \beta \\ & x_{\mathcal{R}_i} \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k}, \quad y \geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{P}_R)$$

unde am folosit notaţiile:

$$\begin{aligned} \gamma_i^{\top} &= c_{\mathcal{R}_i}^{\top} - c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot B_i^{-1} \cdot R_i \\ \gamma_0^{\top} &= c_0^{\top} - \sum_{i=1}^{k} c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot B_i^{-1} \cdot G_i \\ \alpha &= \sum_{i=1}^{k} c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot B_i^{-1} \cdot b_i \\ \\ M_i &= A_{\mathcal{R}_i} - A_{\mathcal{B}_i} \cdot B_i^{-1} \cdot R_i \\ M_0 &= G_0 - \sum_{i=1}^{k} A_{\mathcal{B}_i} \cdot B_i^{-1} \cdot G_i \\ \beta &= b_0 - \sum_{i=1}^{k} A_{\mathcal{B}_i} \cdot B_i^{-1} \cdot b_i \end{aligned}$$

Numărul restricţiilor din problema redusă (P_R) este m_0, adică exact numărul restricţiilor de cuplare din problema iniţială. Din felul în care a fost construit, sistemul de ecuaţii din problema redusă (P_R) împreună cu relaţiile (2.3.12) sunt echivalente cu restricţiile (2.3.8) şi (2.3.9). Cu toate acestea, în problema redusă (P_R), variabilele $x_{\mathcal{B}_i}$, $i = \overline{1,k}$, nu mai sunt supuse condiţiilor de nenegativitate şi astfel, aceste condiţii sunt relaxate. Prin urmare, mulţimea soluţiilor admisibile ale lui (P_R) include pe cea a problemei (2.3.7)-(2.3.10) şi astfel, dacă problema redusă nu are soluţii, atunci nici cea iniţială nu poate avea soluţii. Se poate întâmpla însă ca (P_R) să aibe optim infinit, chiar dacă problema iniţială are un optim finit. Pentru a preîntâmpina o astfel de situaţie, la problema redusă se adaugă restricţia de mărginire

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{e}_i^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}_i} + \mathbf{e}_0^{\top} \cdot y \leq \mu$$

unde constanta $\mu > 0$ are o valoare foarte mare, iar vectorii $\mathbf{e}_i$ au toate componentele egale cu 1 şi sunt de dimensiuni în concordanţă cu $x_{\mathcal{R}_i}$. Dacă μ este suficient de mare şi la terminarea algoritmului această restricţie este activă, atunci problema iniţială va avea optimul infinit.

Fie $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ o soluţie optimă a problemei reduse (P_R). Din (2.3.12) obţinem:

$$\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} = B_i^{-1} \cdot (b_i - R_i \cdot \tilde{x}_{\mathcal{R}_i} - G_i \cdot \tilde{y}) \ , \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.3.13}$$

Astfel, $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}; ...; \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ va fi o soluţie optimă şi pentru problema iniţială "modificată", în care condiţiile $x_{\mathcal{B}_i} \geq \mathbf{0}$ au fost eliminate. În baza Propoziţiei 2.6 putem enunţa următorul rezultat:

Teorema 2.10 (de optimalitate) *Dacă* $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ *este o soluţie optimă a problemei reduse* (P_R) *şi* $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ *se determină din (2.3.13), atunci* $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ *este o soluţie optimă pentru problema (2.3.7)-(2.3.10) dacă şi numai dacă* $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} \geq \mathbf{0}$ *pentru orice* $i = \overline{1,k}$.

Modificarea problemei reduse.

Dacă testul de optimalitate nu este îndeplinit, atunci vom putea aplica principiul de relaxare prezentat în paragraful anterior. Astfel, vom forma o problemă redusă nouă, în care se va impune condiţia de nenegativitate pentru unele variabile din $\mathcal{B}_i$ cu valori negative (şi deci vor intra în (P_R)), în timp ce pentru anumite variabile din $\mathcal{R}_i$ cu valori pozitive, această condiţie va fi relaxată (adică, variabilele în cauză vor ieşi din (P_R)).

Să presupunem, după o eventuală reordonare a variabilelor din blocul i, că primele $r \geq 1$ componente ale lui $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ sunt negative:

$$(\tilde{x}_{\mathcal{B}_i})_j < 0, \quad j = \overline{1,r},$$

iar primele $s \geq 0$ componente ale lui $\tilde{x}_{\mathcal{R}_i}$ sunt pozitive[1]:

$$\left(\tilde{x}_{\mathcal{R}_i}\right)_j > 0, \quad j = \overline{1, s}.$$

Legătura dintre $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ şi $\tilde{x}_{\mathcal{R}_i}$ este dată de relaţia (2.3.12) care se poate rescrie astfel:

$$x_{\mathcal{B}_i} + B_i^{-1} \cdot R_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} = B_i^{-1} \cdot (b_i - G_i \cdot y) \ . \tag{2.3.14}$$

Două cazuri sunt posibile:

Cazul 1. Matricea formată din primele r linii şi primele s coloane ale lui $B_i^{-1} \cdot R_i$ conţine cel puţin un element diferit de zero.

Pentru a fixa ideile, vom considera că un astfel de elemet nenul se află în poziţia (l, t), unde $1 \leq l \leq r$ şi $1 \leq t \leq s$. În această situaţie, în relaţia (2.3.14) se poate efectua o operaţie de schimbare a bazei (elementul (l, t) al matricei $B_i^{-1} \cdot R_i$ va fi pivotul) în care coloana D_i^l este înlocuită de coloana D_i^t. Cu alte cuvinte, variabila $\left(x_{\mathcal{R}_i}\right)_t$ pentru care $\left(\tilde{x}_{\mathcal{R}_i}\right)_t > 0$, este înlocuită de variabila $\left(x_{\mathcal{B}_i}\right)_j$ pentru care $\left(\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}\right)_j < 0$. Operaţia de schimare a bazei se poate efectua de mai multe ori în raport cu elementele nenule din primele r linii şi s coloane ale lui $B_i^{-1} \cdot R_i$. Se obţine astfel, pentru fiecare bloc i, o nouă matrice de bază $\bar{B}_i$. Cu ajutorul acestor matrice de bază, se va forma o nouă problemă redusă.

Cazul 2. Matricea formată din primele r linii şi primele s coloane ale lui $B_i^{-1} \cdot R_i$ are toate elementele egale cu zero.

În acest caz nu se mai pot efectua operaţii de schimbare a bazei, în schimb, la problema redusă se va adăuga una sau mai multe restricţii care să impună condiţia de nenegativitate încălcată. Astfel, dacă $\left(\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}\right)_j < 0$, $1 \leq j \leq r$, pentru a impune condiţia $\left(x_{\mathcal{B}_i}\right)_j \geq 0$, la problema ($\mathrm{P}_R$) se va adăuga restricţia

$$\left(B_i^{-1}\right)_j \cdot (b_i - R_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} - G_i \cdot y) \geq 0 \tag{2.3.15}$$

care este de fapt linia j din relaţia (2.3.12). (Prin $\left(B_i^{-1}\right)_j$ am notat linia j a matricei B_i^{-1}.)

Operaţiile descrise în cazurile 1 sau 2 se pot efectua pentru fiecare bloc i, $1 \leq i \leq k$, pentru care $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ are componente negative. Folosind

[1]Evident, dacă $s = 0$ înseamnă că $\tilde{x}_{\mathcal{R}_i} = \mathbf{0}$.

matricele de bază B_i rezultate din cazul 1 sau prin adăugarea restricţiilor din cazul 2, se obţine o nouă problemă redusă.

Dacă nu suntem la prima iteraţie în care testul de optimalitate este încălcat, iar problema redusă conţine restricţii suplimentare de tipul (2.3.15), acestea vor trebui analizate separat, înainte de a se trece la tratarea cazurilor 1 sau 2.

Cazul 3. Dacă restricţia (2.3.15) nu este activă pentru soluţia optimă a problemei reduse, adică

$$\left(B_i^{-1}\right)_j \cdot (b_i - R_i \cdot \tilde{x}_{\mathcal{R}_i} - G_i \cdot \tilde{y}) > 0,$$

atunci aceasta poate fi eliminată. Conform Propoziţiei 2.7, soluţia optimă nu va fi afectată de această eliminare.

Cazul 4. Dacă restricţia (2.3.15) este activă pentru soluţia optimă a problemei reduse, adică

$$\left(B_i^{-1}\right)_j \cdot (b_i - R_i \cdot \tilde{x}_{\mathcal{R}_i} - G_i \cdot \tilde{y}) = 0,$$

iar în vectorul linie $\left(B_i^{-1}\right)_j \cdot R_i$ există un element nenul care permite efectuarea unei schimbări de bază astfel încât $(x_{B_i})_j$ să fie înlocuită de o variabilă $(x_{\mathcal{R}_i})_t$ pentru care $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_i})_t > 0$, atunci, după efectuarea schimbării de bază, restricţia va fi eliminată. Soluţia optimă va rămâne din nou neschimbată deoarece, prin schimbarea bazei, restricţia în cauză este de fapt rescrisă într-o formă mai convenabilă, în raport cu o variabilă care este pozitivă, şi astfel, condiţia aceasta poate fi suprimată.

Cazul 5. Dacă restricţia (2.3.15) este activă şi toate elemente din vectorul linie $\left(B_i^{-1}\right)_j \cdot R_i$ sunt nule, atunci aceasta va fi menţinută în problema redusă.

Din cele prezentate mai sus, pentru rezolvarea problemei (2.3.7)-(2.3.10), putem enunţa următorul algoritm:

Algoritmul lui Ritter

Pasul 0. Prin rezolvarea subproblemelor (2.3.11) se determină matricele de bază iniţiale B_i pentru fiecare bloc $i = \overline{1,k}$, şi se formează problema redusă (P_R).

Pasul 1. Se rezolvă problema redusă; se obţine soluţia $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ Din relaţia (2.3.13) se calculează $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$, $i = \overline{1,k}$. Dacă $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} \geq 0$, pentru orice $i = \overline{1,k}$, atunci $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k}, \tilde{y})$ este o soluţie optimă a problemei (2.3.7)-(2.3.10).

Pasul 2. Pentru fiecare bloc în care $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ are componente negative, dacă problema redusă conţine restricţii suplimentare de tipul (2.3.15), atunci acestea vor fi prelucrate conform Cazurilor 3-5.

Pasul 3. Pentru fiecare bloc în care $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ are componente negative, fie se efectuează operaţiile de schimbare a bazei corespunzătoare Cazului 1, fie se adaugă restricţii pentru impunerea unor condiţii de nenegativitate din Cazul 2.

Pasul 4. Cu matricele de bază şi restricţiile obţinute din Paşii 2 şi 3, se formează o nouă problemă redusă şi se revine la Pasul 1.

Deoarece algoritmul lui Ritter este un procedeu de partiţionare şi relaxare, se pot aplica rezultatele generale cu privire la această metodă. Astfel, în baza Propoziţiei 2.8, valorile funţiei obiectiv vor fi monoton crescătoare, iar Propoziţia 2.9 asigură convergenţa într-un număr finit de iteraţii a algoritmului. În consecinţă, putem enunţa următoarea teoremă:

Teorema 2.11 *Dacă eliminarea condiţiilor de nenegativitate asupra variabilelor pozitive din $x_{\mathcal{R}_i}$ se face doar dacă valoarea funcţiei obiectiv este strict crescătoare, atunci algoritmul lui Ritter se termină într-un număr finit de iteraţii, fie cu o soluţie optimă a problemei (2.3.7)-(2.3.10), fie se obţine o problemă redusă care nu admite soluţii.*

2.3.3. Algoritmul lui Rosen

Metoda de relaxare şi partiţionare a lui Rosen [33] este o variantă a algoritmului lui Ritter, care se aplică la problemele de optimizare liniară cu restricţiile bloc-unghiulare, adică, care au matricea restricţiilor în formă bloc-diagonală, iar blocurile sunt unite doar prin restricţii de cuplare. Evident, pot fi considerate şi probleme în care legătura dintre blocuri să fie realizată doar prin variabile de cuplare, deoarece acestora le corespund probleme duale ce au forma descrisă mai înainte.

Din cauza acestei forme a restricţiilor, algoritmul care se obţine are anumite avantaje, cum ar fi, de exemplu, faptul că la problema redusă nu mai trebuie adăugate restricţii suplimentare. Pe de alta parte, rezolvarea succesivă a problemelor reduse se poate face mai eficient, putându-se utiliza algoritmul simplex dual, deoarece baza optimă de la iteraţia i, este înlocuită cu uşurinţă în iteraţia $i+1$ de una dual admisibilă.

Problema bloc-unghiulară se enunţă astfel:

$$\inf \sum_{i=1}^{k} c_i^\top \cdot x^i \tag{2.3.16}$$

în raport cu:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i \cdot x^i = b_0 \tag{2.3.17}$$

$$D_i \cdot x^i = b_i\ , \quad i=\overline{1,k} \tag{2.3.18}$$

$$x^i \geq \mathbf{0},\ i=\overline{1,k}. \tag{2.3.19}$$

Datele problemei au următoarele dimensiuni:

$$\begin{aligned} A_i &\in \mathbb{R}^{m_0 \times n_i}, \quad D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i=\overline{1,k}, \\ b_i &\in \mathbb{R}^{m_i}, \quad i=\overline{0,k}. \end{aligned}$$

Vom presupune, fără a influenţa generalitatea problemei, că matricea restricţiilor (2.3.17)-(2.3.18) are rangul egal cu $\sum\limits_{i=0}^{k} m_i$. De aici rezultă că $rang\,(D_i) = m_i$ pentru orice $i=\overline{1,k}$. Pentru determinarea unor baze iniţiale asociate fiecărui bloc, se rezolvă subproblemele

$$\inf \left\{ c_i^\top \cdot x^i \mid D_i \cdot x^i = b_i\ , \quad x^i \geq \mathbf{0} \right\}\ , \quad i=\overline{1,k} \tag{2.3.20}$$

Dacă una din aceste subprobleme nu are soluţie, atunci nici problema (2.3.16)-(2.3.19) nu va avea soluţie. În caz contrar, fie B_i bazele obţinute prin rezolvarea subproblemelor (2.3.20), acestea putând fi cele optime sau cele care indică o direcţie spre $-\infty$. Cu ajutorul acestor baze, partiţionăm coloanele matricelor $D_i = \left(B_i \vdots R_i\right)$ şi folosind notaţiile obişnuite, sistemele (2.3.18) se pot rescrie astfel:

$$x_{\mathcal{B}_i} = B_i^{-1} \cdot b_i - B_i^{-1} \cdot R_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} \tag{2.3.21}$$

În mod similar, se partiţionează şi funcţia obiectiv (2.3.16) şi restricţiile de cuplare (2.3.17):

$$\inf \sum_{i=1}^{k} \left(c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot x_{\mathcal{B}_i} + c_{\mathcal{R}_i}^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}_i} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(A_{\mathcal{B}_i} \cdot x_{\mathcal{B}_i} + A_{\mathcal{R}_i} \cdot x_{\mathcal{R}_i} \right) = b_0$$

şi înlocuind aici pe $x_{\mathcal{B}_i}$ din (2.3.21), obţinem problema redusă:

$$\left.\begin{array}{ll} & \inf \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}_i} + \alpha \\ \text{în raport cu} & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} M_i \cdot x_{\mathcal{R}_i} = \beta \\ & x_{\mathcal{R}_i} \geq \mathbf{0},\ i = \overline{1,k} \end{array}\right\} \tag{P$_R$}$$

unde am folosit notaţiile:

$$\begin{aligned} \gamma_i^{\top} &= c_{\mathcal{R}_i}^{\top} - c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot B_i^{-1} \cdot R_i \\ \alpha &= \sum_{i=1}^{k} c_{\mathcal{B}_i}^{\top} \cdot B_i^{-1} \cdot b_i \\ M_i &= A_{\mathcal{R}_i} - A_{\mathcal{B}_i} \cdot B_i^{-1} \cdot R_i \\ \beta &= b_0 - \sum_{i=1}^{k} A_{\mathcal{B}_i} \cdot B_i^{-1} \cdot b_i \end{aligned}$$

Problema redusă (P$_R$) are doar m_0 restricţii. Deoarece restricţiile problemei reduse împreună cu (2.3.21) fac parte din restricţiile problemei iniţiale, dacă (P$_R$) nu are soluţii, atunci nici problema (2.3.16)-(2.3.19) nu va avea soluţii. Există însă posibilitatea ca (P$_R$) să aibe optim infinit, în timp ce problema iniţială să aibe optim finit. Pentru a preîntâmpina o astfel de situaţie, la problema redusă se adaugă o restricţie de mărginire de forma

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{e}_i^{\top} \cdot x_{\mathcal{R}_i} \leq \mu$$

unde constanta $\mu > 0$ are o valoare foarte mare, iar vectorii $\mathbf{e}_i$ au toate componentele egale cu 1 şi sunt de dimensiuni în concordanţă cu $x_{\mathcal{R}_i}$. Dacă μ este suficient de mare şi la terminarea algoritmului această restricţie este activă, atunci optimul problemei iniţiale va tinde spre $-\infty$.

Fie $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ o soluţie optimă a problemei reduse (P_R). Din (2.3.21) obţinem:

$$\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} = B_i^{-1} \cdot b_i - B_i^{-1} \cdot R_i \cdot \tilde{x}_{\mathcal{R}_i}\ , \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.3.22}$$

Astfel, $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ va fi o soluţie optimă şi pentru problema iniţială "modificată", în care condiţiile $x_{\mathcal{B}_i} \geq \mathbf{0}$ au fost relaxate. Ţinând seama de rezultatele anterioare cu privire la metoda de relaxare, putem enunţa următoarea teoremă.

Teorema 2.12 (de optimalitate) *Dacă $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ este o soluţie optimă a problemei reduse (P_R) şi $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ se determină din (2.3.22), atunci $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ este o soluţie optimă pentru problema (2.3.16)-(2.3.19) dacă şi numai dacă $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} \geq \mathbf{0}$ pentru orice $i = \overline{1,k}$.*

Dacă testul de optimalitate nu este îndeplinit, se poate forma o nouă problemă redusă, în care se va impune condiţia de nenegativitate pentru cel puţin o variabilă din $\mathcal{B}_i$ cu valori negative, în timp ce pentru o anumită variabilă din $\mathcal{R}_i$ cu valori pozitive, această condiţie va fi relaxată (adică, se va putea efectua cel puţin o operaţie de schimbare a bazei între coloanele din D_i). Deoarece problema (2.3.16)-(2.3.19) nu conţine variabile de cuplare, la problema redusă nu mai trebuie să se adauge restricţii suplimentare, aşa cum a fost cazul la algoritmul lui Ritter.

Teorema 2.13 *Fie $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, ..., \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ o soluţie optimă a problemei reduse (P_R). Dacă pentru un anumit i, $1 \leq i \leq k$, vectorul $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ determinat din (2.3.22), are componente negative, atunci în matricea D_i se poate* *efectua cel puţin o operaţie de schimbare a bazei de înlocuire a unei coloane* D_i^r, *pentru care* $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_i})_r < 0$, *cu o coloană* D_i^s, *pentru care* $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_i})_s > 0$.

Demonstraţie. Pentru a simplifica scrierea pe parcursul acestei demonstraţii, vom renunţa la folosirea indicelui i, care indentifică blocul în care condiţia de optimalitate este încălcată. Astfel, vom considera partiţionarea matricei $D = \left(B \vdots R\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, iar mulţimile de indici pentru coloanele corespunzătoare le notăm cu $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{R}$.

Conform ipotezelor de lucru, baza B este primal admisibilă pentru subproblema (2.3.20) şi deci, soluţia de bază asociată are toate componentele nenegative: $\begin{pmatrix} \bar{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$, unde $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b$, fiind aşadar o suluţie admisibilă a sistemului

$$\begin{cases} B \cdot x_{\mathcal{B}} + R \cdot x_{\mathcal{R}} = b \\ x_{\mathcal{B}} \geq \mathbf{0}, \quad x_{\mathcal{R}} \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.3.23}$$

Pe de altă parte, vectorul $\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathcal{B}} \\ \tilde{x}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ verifică doar sistemul de ecuaţii de mai sus, dar încalcă condiţia $x_{\mathcal{B}} \geq \mathbf{0}$, deoarece în ipotezele teoremei, $\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ conţine elemente negative.

Pentru $\lambda \in [0,1]$ definim vectoul $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ astfel:

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}}(\lambda) \\ x_{\mathcal{R}}(\lambda) \end{pmatrix} = (1-\lambda) \begin{pmatrix} \bar{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x}_{\mathcal{B}} \\ \tilde{x}_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}.$$

Avem evident $D \cdot x(\lambda) = b$, oricare ar fi $\lambda \in [0,1]$. Deoarece $x_{\mathcal{R}}(\lambda) = \lambda \tilde{x}_{\mathcal{R}} \geq 0$, pentru ca $x(\lambda)$ să fie o soluţie a sistemului (2.3.23), este suficient să impunem condiţia

$$x_{\mathcal{B}}(\lambda) = (1-\lambda)\bar{x}_{\mathcal{B}} + \lambda \tilde{x}_{\mathcal{B}} \geq \mathbf{0},$$

adică,

$$\lambda \leq \frac{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_i}{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_i - (\tilde{x}_{\mathcal{B}})_i}, \quad \text{pentru orice } i \in \mathcal{I},$$

unde $\mathcal{I} = \{i \mid (\tilde{x}_{\mathcal{B}})_i < 0\} \subseteq \{1, 2, ..., m\}$. Prin urmare, luând

$$\lambda_0 = \min_{i\in\mathcal{I}} \left\{ \frac{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_i}{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_i - (\tilde{x}_{\mathcal{B}})_i} \right\} = \frac{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_r}{(\bar{x}_{\mathcal{B}})_r - (\tilde{x}_{\mathcal{B}})_r}, \tag{2.3.24}$$

avem $x(\lambda_0) \geq \mathbf{0}$, şi $x_r(\lambda_0) = 0$.

Vom nota $\mathcal{J} = \left\{ j \mid (\tilde{x}_{\mathcal{R}})_j > 0 \right\} \subseteq \{1, 2, ..., n-m\}$. Mulţimea $\mathcal{J}$ este nevidă, deoarece în caz contrar, $\tilde{x}_{\mathcal{R}} = \mathbf{0}$ şi atunci, din (2.3.22) rezultă $\tilde{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1} \cdot b \geq \mathbf{0}$, ceea ce contrazice ipoteza că $\tilde{x}_{\mathcal{B}}$ are componente negative. Deoarece $x(\lambda_0)$ verifică sistemul $D \cdot x = b$, putem scrie

$$B \cdot (\bar{x}_{\mathcal{B}} + \lambda_0 (\tilde{x}_{\mathcal{B}} - \bar{x}_{\mathcal{B}})) + \lambda_0 \sum_{j \in \mathcal{J}} R^j (\tilde{x}_{\mathcal{R}})_j = b,$$

sau, înmulţind la stânga cu B^{-1} şi ţinând seama că $x_r(\lambda_0) = 0$, avem

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} x_i(\lambda_0) e^i + \lambda_0 \sum_{j \in \mathcal{J}} B^{-1} \cdot R^j (\tilde{x}_{\mathcal{R}})_j = B^{-1} \cdot b, \tag{2.3.25}$$

unde $e^i \in \mathbb{R}^m$ este vectorul unitar cu 1 pe poziţia i. Rangul matricei sistemului (2.3.25) este egal cu m şi este acelaşi ca cel al matricei D. Deoarece vectorii e^i sunt linar independenţi şi sunt doar $m-1$ la număr, rezultă că există un $s \in J$ astfel încât $(B^{-1} \cdot R^s)_r \neq 0$. Cu alte cuvinte, din (2.3.25) deducem că sistemul $D \cdot x = b$ admite o soluţie nenegativă chiar şi în absenţa coloanei B^r din matricea D. În baza Teoremei fundamentale a programării liniare, dacă $x(\lambda_0)$ este o soluţie admisibilă pentru (2.3.23) în care coloana B^r lipseşte, atunci există şi o soluţie admisibilă de bază. Matricea de bază astfel obţinută nu va conţine pe B^r, în schimb, va avea în componenţa ei cel puţin o coloană R^s, $s \in J$. Astfel, teorema este demonstrată. ■

Pentru a obţine o nouă bază primal admisibilă $\tilde{B}_i$ corespunzătoare unui bloc neoptimal i, adică pentru care vectorul $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ determinat din (2.3.22) are componente negative, este suficient să se rezolve o problemă de tipul

$$\left.\begin{array}{ll} & \min \{x_r\} \\ \text{în raport cu} & B \cdot x_{\mathcal{B}} + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} R^j (x_{\mathcal{R}})_j = b \\ & x_{\mathcal{B}} \geq \mathbf{0}, \quad (x_{\mathcal{R}})_j \geq 0,\ j \in \mathcal{J} \end{array}\right\} \tag{2.3.26}$$

unde indicele r realizează minimul din relaţia (2.3.24). O matrice iniţială de bază este chiar matricea B, iar problema admite o soluţie optimă în care x_r este o variabilă secundară.

Prin rezolvarea problemelor de tipul (2.3.26) pentru fiecare bloc neoptimal, se obţin matricele de bază noi $\tilde{B}_i$ cu ajutorul cărora se determină o nouă problemă redusă şi procedeul se repetă.

Deoarece metoda descrisă aici foloseşte tot o tehnică de partiţionare şi relaxare, rezultatele generale se pot aplica şi aici pentru a justifica faptul că problema se poate rezolva într-un număr finit de iteraţii.

Procedeul descris mai sus se poate rezuma în următorul algoritm:

Algoritmul lui Rosen

Pasul 0. Se determină pentru fiecare bloc $i = \overline{1,k}$, bazele iniţiale B_i prin rezolvarea subproblemelor (2.3.20). Dacă una din subprobleme nu admite soluţie, atunci nici problema (2.3.16)-(2.3.19) nu are soluţie. STOP.
Altfel, cu ajutorul bazelor B_i, $i = \overline{1,k}$, se formează problema redusă (P_R).

Pasul 1. Se rezolvă problema redusă (P_R). Dacă (P_R) nu are soluţie, atunci nici problema (2.3.16)-(2.3.19) nu are soluţie. STOP.
Altfel, se obţine o soluţie optimă $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, \ldots, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$.

Pasul 2. Se calculează $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$, $i = \overline{1,k}$, din relaţia (2.3.22).

Pasul 3. Dacă $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i} \geq \mathbf{0}$, $i = \overline{1,k}$, atunci $(\tilde{x}_{\mathcal{B}_1}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_1}, \ldots, \tilde{x}_{\mathcal{B}_k}, \tilde{x}_{\mathcal{R}_k})$ este o soluţie optimă a problemei (2.3.16)-(2.3.19). STOP.
În caz contrar, pentru fiecare bloc i în care $\tilde{x}_{\mathcal{B}_i}$ are componente negative, se determină indicele $r \in \mathcal{I}$ din formula (2.3.24) şi se rezolvă problema (2.3.26) corespunzătoare, obţinându-se o nouă bază primal admisibilă $\tilde{B}_i$.

Pasul 4. Cu ajutorul bazelor $\tilde{B}_i$ obţinute la pasul anterior, se formează o nouă problemă redusă şi se revine la Pasul 1.

Observaţia 2.7 *Există diferite moduri în care se poate alege variabila asupra căreia să se impună condiţia de nenegativitate încălcată. Deoarece această operaţie nu conduce la mărirea dimensiunii problemei reduse, devine atractivă ideea de a impune cât mai multe astfel de condiţii în acelaşi timp. Acest lucru se poate realiza cu uşurinţă prin* *înlocuirea funcţiei obiectiv din problema (2.3.26) cu*

$$\min\left\{\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i\right\}.$$

Considerarea unor astfel de probleme se poate face pentru fiecare bloc neoptimal.

Observaţia 2.8 *Dacă testul de optimalitate nu este îndeplinit, în urma operaţiilor care se efectuează asupra blocurilor neoptimale la Paşii 3 şi 4 ai algoritmului, baza optimă a problemei reduse se transformă într-una dual admisibilă. Astfel, la iteraţia următoare, se poate folosi algoritmul simplex dual pentru rezolvarea problemei reduse.*

Pentru a justifica observaţia de mai sus, să considerăm o problemă cu un singur bloc:

$$\inf\left\{c^\top\cdot x \;\middle|\; \begin{array}{l} A\cdot x = b_0 \\ D\cdot x = b \end{array},\; x\geq \mathbf{0}\right\}. \tag{2.3.27}$$

în care $A\in\mathbb{R}^{m_0\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{m\times n}$, iar $c\in\mathbb{R}^n$, $b_0\in\mathbb{R}^{m_0}$ şi $b\in\mathbb{R}^m$.

Deoarece orice problemă de programare liniară, care are cel puţin două restricţii, poate fi considerată în forma de mai sus, rezultă că algoritmul lui Rosen are un caracter general. Pe de altă parte, într-o problemă cu mai multe blocuri, acestea sunt independente între ele, în sensul că orice schimbare de bază efectuată în cadrul unui bloc nu are efect asupra celorlalte blocuri, iar în ceea ce priveşte restricţiile de cuplare, schimbările care survin aici se aplică doar în zona care corespunde bocului respectiv. Din această cauză, analiza pe care o facem în continuare asupra problemei (2.3.27) se poate extinde fără nici o dificultate şi la problemele cu mai multe blocuri.

Prin partiţionarea coloanelor lui $D=\left(B\,\vdots\,R\right)$ în raport cu o matrice nesingulară B, avem

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}\cdot b - B^{-1}\cdot R\cdot x_{\mathcal{R}} \tag{2.3.28}$$

şi substituind pe $x_{\mathcal{B}}$ în problema (2.3.27), obţinem problema redusă

$$\left.\begin{array}{lc} & \inf\ \left\{\gamma^{\top}\cdot x_{\mathcal{R}}\right\}+\alpha \\ \text{în raport cu} & M\cdot x_{\mathcal{R}}=\beta \\ & x_{\mathcal{R}}\geq \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{2.3.29}$$

în care condiţia $x_{\mathcal{B}}\geq \mathbf{0}$ este relaxată şi am introdus notaţiile:

$$\begin{array}{rcl} \gamma^{\top} & = & c_{\mathcal{R}}^{\top}-c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot B^{-1}\cdot R \\ \alpha & = & c_{\mathcal{B}}^{\top}\cdot B^{-1}\cdot b \\ M & = & A_{\mathcal{R}}-A_{\mathcal{B}}\cdot B^{-1}\cdot R \\ \beta & = & b_0-A_{\mathcal{B}}\cdot B^{-1}\cdot b \end{array}$$

Rezolvarea problemei reduse conduce la partiţionarea coloanelor matricei $M=\left(M_1 \vdots M_2\right)$, unde M_1 este matricea de bază optimă. Vom nota cu $\mathcal{R}_1$ şi $\mathcal{R}_2$, mulţimile de indici corespunzătoare coloanelor care intră în componenţa lui M_1, respectiv M_2.

Printr-o eventuală reordonare a coloanelor problemei (2.3.27), putem considera $\mathcal{B}=\{1,2,...,m\}$, $\mathcal{R}_1=\{m+1,m+2,...,m+m_0\}$ şi $\mathcal{R}_2=\{m+m_0+1,...,n\}$. Tabloul simplex corespunzător soluţiei optime a problemei (2.3.27), va avea următoarea structură:

$$\begin{array}{c|c|cc|} & & x_{\mathcal{R}_1} & x_{\mathcal{R}_2} \\ \hline x_{\mathcal{R}_1} & \bar{\beta} & \mathbf{I}_{m_0} & M_1^{-1}\cdot M_2 \\ \hline & v & \mathbf{0}_{m_0}^{\top} & w^{\top} \\ \hline \end{array}$$

unde $\bar{\beta}=M_1^{-1}\cdot\beta$, v este valoarea optimă a problemei reduse, $\mathbf{0}_{m_0}$ este vectorul nul de dimensiune m_0, $\mathbf{I}_{m_0}$ este matricea unitate de ordinul m_0, iar $w^{\top}$ este vectorul linie constituit din costurile reduse. Deoarece M_1 este o bază optimă, avem $w\leq\mathbf{0}$. Putem extinde acest tablou prin includerea în el şi a restricţiilor (2.3.28):

$$
\begin{array}{c|c|ccc|}
 & & x_{\mathcal{B}} & x_{\mathcal{R}_1} & x_{\mathcal{R}_2} \\
\hline
x_{\mathcal{B}} & \bar{b} & \mathbf{I}_m & Y_{\mathcal{R}_1} & Y_{\mathcal{R}_2} \\
x_{\mathcal{R}_1} & \bar{\beta} & \mathbf{0}_{m_0 \times m} & \mathbf{I}_{m_0} & M_1^{-1} \cdot M_2 \\
\hline
 & v & \mathbf{0}_m^\top & \mathbf{0}_{m_0}^\top & w^\top \\
\hline
\end{array}
$$

unde $\bar{b} = B^{-1} \cdot b$ şi $Y = B^{-1} \cdot R$. De fapt, tabloul de mai sus reprezintă o rescriere a problemei (2.3.27) într-o formă echivalentă.

Dacă presupunem acum că vectorul $\tilde{x}_{\mathcal{B}} = \bar{b} - Y_{\mathcal{R}_1} \cdot \bar{\beta}$ are o componentă negativă, fie aceasta $(\tilde{x}_{\mathcal{B}})_r < 0$, atunci, conform algoritmului lui Rosen, există o componentă $y_{rk} \neq 0$ a matricei $Y_{\mathcal{R}_1}$ pentru care $(\tilde{x}_{\mathcal{R}_1})_k = \bar{\beta}_k > 0$. Schimbarea de bază, care se efectuează pentru înlocuirea variabilei $(x_{\mathcal{R}_1})_k = x_{m+k}$ cu $(x_{\mathcal{B}})_r = x_r$, se va realiza cu pivotul y_{rk}. Deoarece în tabloul considerat mai sus, ultimul element din coloana $k \in \mathcal{R}_1$ este zero, valorile lui v şi w nu se vor modifica în urma schimbării de bază. Astfel, noua bază care se va obţine pentru problema redusă va rămâne dual admisibilă. De asemenea, cele m_0 linii din tablou, corespunzătoare lui $\mathcal{R}_1$, vor rămâne neschimbate, cu excepţia liniei k, care va primi valorile după cum urmează:

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & \cdots & x_r & \cdots & x_{m+1} & \cdots & x_{m+k} & \cdots & x_{m+m_0} & \cdots \\
\hline
\vdots & & 0 & & 1 & \cdots & 0 & & 0 & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\bar{\beta}_k - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} & \cdots 0 & \frac{-1}{y_{rk}} & 0 \cdots & \frac{-y_{r1}}{y_{rk}} & & 0 & & \frac{-y_{rm_0}}{y_{rk}} & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
\vdots & & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

De aici se vede cu uşurinţă că, pentru noua problemă redusă, în care vom avea $\mathcal{R}_1^{nou} = \mathcal{R}_1 \setminus \{k\} \cup \{r\}$, inversa matricei de bază se obţine din cea veche astfel:

$$(M_1^{nou})^{-1} = E_{rk} \cdot M_1^{-1}$$

unde E_{rk} este o matrice pătratică de ordinul m_0, care diferă de matricea unitate doar prin linia k, care se înlocuieşte cu linia r a matricei

$Y_{\mathcal{R}_1}$. luând toate elementele cu semnul schimbat

$$E_{rk} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -y_{r1} & \cdots & -y_{rk-1} & -y_{rk} & -y_{rk+1} & \cdots & -y_{rm_0} \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Indiferent de numărul de schimbări de variabilă care se face între componentele lui $x_{\mathcal{B}}$ şi $x_{\mathcal{R}_1}$, valorile lor corespunzătoare nu se vor schimba, deoarece acestea reprezintă soluţia unică a sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m \cdot x_{\mathcal{B}} + Y_{\mathcal{R}_1} \cdot x_{\mathcal{R}_1} &= \bar{b} \\ \mathbf{I}_{m_0} \cdot x_{\mathcal{R}_1} &= \bar{\beta} \end{aligned}$$

Prin urmare, noua bază M_1^{nou}, care se obţine pentru problema redusă, va fi dual admisibilă, deoarece $w \leq \mathbf{0}$ rămâne neschimbat şi soluţia corespunzătoare conţine componente negative.

2.3.4. Exemplu de aplicare a algoritmului lui Rosen

Să considerăm următoarea problemă:

$$\inf\{-x_1 - x_2 - 2x_5 - x_6 + x_8\}$$

în raport cu

$$\begin{array}{lllllllllll} x_1 & +2x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & & & & = 40 \\ x_1 & +x_2 & & & +4x_5 & +2x_6 & & & & = 50 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & & & & & = 30 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & & & & = 20 \\ & & & & x_5 & & +x_7 & & & = 10 \\ & & & & & x_6 & & +x_8 & & = 10 \\ & & & & x_5 & +x_6 & & & +x_9 & = 15 \end{array}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,9}.$

Pasul 0. Pentru determinarea bazelor primal admisibile iniţiale, vom rezolva subproblemele:

$$\inf\left\{-x_1-x_2 \;\middle|\; \begin{array}{llll} x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 30 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 20 \\ & & x_i \geq 0,\; i=\overline{1,4} & & \end{array}\right\}$$

care are soluţia optimă: $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = x_4 = 0$, şi

$$\inf\left\{-2x_5-x_6+x_8 \;\middle|\; \begin{array}{llllll} x_5 & & +x_7 & & & = 10 \\ & x_6 & & +x_8 & & = 10 \\ x_5 & +x_6 & & & +x_9 & = 15 \\ & & x_i \geq 0,\; i=\overline{5,9} & & & \end{array}\right\}$$

care are soluţia optimă: $x_5 = 10$, $x_6 = x_8 = 5$, $x_7 = x_9 = 0$.
Bazele iniţiale vor fi:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{care are inversa} \quad B_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{care are inversa} \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cu ajutorul matricelor de bază B_1 şi B_2, se fac următoarele substituţii în funcţia obiectiv şi în restricţiile de cuplare ale problemei iniţiale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+\frac{1}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4 \\ 8-\frac{2}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_7 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x_7 \\ 5+x_7-x_9 \\ 5-x_7+x_9 \end{pmatrix}$$

Se obţine astfel problema redusă:

$$\inf\left\{-29+\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4-x_7+3x_9 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{3}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4+x_7+x_9 = 7 \\ \frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4+2x_7+2x_9 = 14 \\ x_i \geq 0,\; i \in \{3,4,7,9\} \end{array}\right\}$$

Iteraţia 1.

Pasul 1. Se rezolvă problema redusă, care are soluţia optimă: $x_7 = 7$, $x_3 = x_4 = x_9 = 0$, iar valorarea optimă este: $-29 - 7 = -36$.

Tabloul simplex corespunzător soluţiei optime este:

		x_3	x_4	x_7	x_9
x_3	0	1	0	0	0
x_7	7	0	1/5	1	1
	-7	0	-3/5	0	-4

Pasul 2. Cu soluţia problemei reduse, determinăm valorile variabilelor substituite:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Deoarece $x_8 = -2$, soluţia nu este optimă. Va trebui deci să efectuăm o schimbare de bază în blocul al doilea, înlocuindu-l pe x_7, care este singura variabilă care are o valoare pozitivă, cu x_8, care are o valoare negativă. Noua bază va corespunde variabilelor x_5, x_6 şi x_7, deci

$$B_2^{nou} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B_2^{nou})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pasul 4. Se formează o nouă problemă redusă corespunzătoare lui B_2^{nou}, efectuând în problema iniţială substituţiile:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ 8 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + x_8 - x_9 \\ 10 - x_8 \\ 5 - x_8 + x_9 \end{pmatrix}$$

Problema care se obţine este:

$$\inf\left\{-34+\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4-x_8+2x_9 \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{3}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4-x_8+2x_9=2 \\ \frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4-2x_8+4x_9=4 \\ x_i\geq 0,\ i\in\{3,4,8,9\}\end{array}\right\}$$

Iteraţia 2.

Pasul 1. Pentru rezolvarea problemei reduse, vom scrie tabloul simplex în raport cu baza corespunzătoare lui x_3 şi x_8, care ştim că este dual admisibilă:

		x_3	x_4	x_8	x_9
x_3	0	1	0	0	0
x_8	-2	0	-1/5	1	$\boxed{-2}$
	2	0	-1/5	0	0

Aplicând algoritmul simplex dual, x_8 va fi înlocuit în bază de x_9:

		x_3	x_4	x_8	x_9
x_3	0	1	0	0	0
x_9	1	0	-1/10	1/2	1
	2	0	-1/5	0	0

Acest tablou este optim, soluţia fiind: $x_9=1$, $x_3=x_4=x_8=0$, iar valoarea optimă a problemei reduse va fi egală cu $-34+2=-32$.

Pasul 2. Calculăm valorile variabilelor substituite:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Deoarece acestea sunt toate nenegative, soluţia obţinută în această interaţie este optimă pentru problema bloc-unghiulară: $x_1=6$, $x_2=8$, $x_3=x_4=0$, $x_5=5$, $x_6=10$, $x_7=5$, $x_8=0$, $x_9=1$, cu valoarea optimă: -32.

Capitolul 3

Metode cu şiruri recurente

3.1. Introducere

Algoritmul simplex se bazează pe următoarea strategie: porneşte dintr-un punct de extrem al domeniului de admisibilitate (dacă acesta există), alege de-a lungul unei muchii un vârf adiacent cu cel anterior, astfel încât valoarea funcţiei obiectiv să-şi îmbunătăţească valoarea; procedeul se repetă până când, fie se ajunge într-un vârf optimal, fie valoarea funcţiei obiectiv devine nemărginită de-a lungul unei raze extremale a domeniului. Cu alte cuvinte, căutarea soluţiei optime se face **pe frontiera** domeniului de admisibilitate, direcţiile folosite fiind de-a lungul muchiilor domeniului. Această strategie s-a dovedit însă neadecvată pentru problemele liniare de dimensiuni mari, timpul de rezolvare devenind prohibitiv din cauza numărului mare de iteraţii care creşte exponenţial în raport cu dimensiunea problemei.

Murty şi Fathi [26] au prezentat variante ale algoritmului simplex care constau în alegerea succesiunii de vârfuri după direcţii ce trec prin interiorul domeniului de admisibilitate sau al unei feţe de dimensiune cel puţin doi. Se poate demonstra că, în ipoteze puţin restrictive, aceşti algoritmi sunt finiţi, iar implementarea lor se face folosind inversa bazei curente, întocmai ca la algoritmul simplex. Experimentele de calcul au pus în evidenţă faptul că timpul de rezolvare a problemelor liniare este îmbunătăţit pe această cale faţă de varianta clasică, dar fenomenul creşterii exponenţiale a iteraţiilor odată cu creşterea dimensiunii nu este eliminat.

Fenomenul acesta s-a putut constata chiar şi la metodele de descompunere sau partiţionare, folosite în rezolvarea unor probleme reale.

O alternativă la aceste metode a fost elaborarea unor algoritmi care să construiască un şir de puncte convergent către soluţia optimă, fie din ineriorul domniului de admisibilitate (metode de punct interior), fie din exteriorul acestuia (metode de punct exterior). Inspiraţia pentru o astfel de abordare provine din optimizarea neliniară. Ceea ce se urmăreşte în mod deosebit la aceste metode este ca efortul de calcul să nu mai aibe o creştere exponenţială în raport cu dimensiunea problemei, ci să fie "în timp polinomial" - noţiune pe care o vom explica în paragraful următor.

Prin publicarea în 1979 a algoritmului elipsoidal, Hacian [16] a fost primul care a pus în evidenţă posibilitatea obţinerii unor metode care sunt mai eficiente în rezolvarea problemelor de dimensiuni mari decât cele bazate pe algoritmul simplex. Fiind o metodă de punct exterior, acestă inovaţie în ceea ce priveşte abordarea problemelor liniare, a fost primită pentru început cu destulă reţinere, deoarece viteza sa de convergenţă nu a fost suficient de convingătoare. Abia după publicarea în 1984 a algoritmului lui Karmarkar [20], interesul pentru astfel de metode alternative a cunoscut o dezvoltare remarcabilă.

Algoritmul lui Karmarkar este o metodă de punct interior pentru rezolvarea problemelor de programare liniară. El necesită cunoaşterea unui "punct iniţial" din interiorul domeniului de admisibilitate, pentru ca începând cu acesta, să se genereze un şir de puncte din interiorul domeniului de admisibilitate, cu proprietatea că costurile lor să conveargă către costul optimal.

Există două tipuri de astfel de algoritmi:

- **algoritmul proiectiv**, care foloseşte transformări proiective pentru generarea şirului de puncte. Karmarkar a demonstrat că algoritmul este convergent şi rezolvă problema în timp polinomial;
- **algoritmul afin**, care foloseşte transformări afine pentru generarea punctelor. Pentru acesta nu s-a demonstrat că poate să conveargă în timp polinomial, în schimb, el prezintă evidente avantaje pentru implementarea lui practică şi de altfel, majoritatea consemnărilor cu privire la performanţele obţinute de algoritmii de punct interior, sunt făcute pentru cazul afin.

Pentru ambele variante există un câmp vectorial al soluţiilor admisibile, care poate fi descris de ecuaţii diferenţiale din care se obţin traiectorii ale soluţiilor admisibile în interiorul domeniului, iar toate aceste traiectorii ajung la o soluţie optimă. De regulă, cele două tipuri de algoritmi generează puncte de-a lungul unor traiectorii diferite, dar ele au totuşi în comun o traiectorie, numită "traiectoria centrală".

3.2. Algoritmul elipsoidal

Primul algoritm în timp polinomial a fost elaborat de matematicianul sovietic L.G. Hacian [16] şi este o metodă de punct exterior. Acest algoritm nu rezolvă direct o problemă de programare liniară, ci un sistem de inegalităţi echivalent cu aceasta. Deoarece conceptul principal pe care se bazează este cel de "elipsoid", metoda mai este cunoscută şi sub denumirea de "algoritmul elipsoidal".

Calculatorul virtual.

Pentru a putea evalua cu mai multă uşurinţă efortul de calcul în aplicarea algoritmului, vom considera că avem la dispoziţie un **calculator virtual**, care are următoarele caracteristici:

- toate operaţiile aritmetice (+, -, *, /) sunt efectuate într-o unitate de timp, indiferent de mărimea operanzilor, iar rezultatul este obţinut exact (fără trunchiere). De asemenea, rădăcina pătrată se poate extrage exact şi tot într-o unitate de timp;
- se pot efectua comparaţii;
- nu există limitări pentru reprezentarea numerelor.

Evident, calculatoarele reale nu se bucură de toate aceste proprietăţi. Rezultatele operaţiilor aritmetice sunt de cele mai multe ori trunchiate, ca de altfel şi extragerea rădăcinii pătrate, care în plus, se obţine în urma unui proces iterativ ce implică foarte multe operaţii aritmetice.

Mărimea unei probleme.

Fiind dată o problemă de programare liniară, vom numi **mărimea**

problemei numărul de biţi necesari pentru reprezentarea binară a tuturor coeficienţilor nenuli. Acest număr îl vom nota cu L şi valoarea sa este estimată prin formula:

$$L = mn + \lceil \log_2 |P| \rceil + n \lceil \log_2 n \rceil \tag{3.2.1}$$

unde m şi n sunt dimensiunile problemei, iar P este produsul tuturor coeficienţilor nenuli din problemă. Notaţia $\lceil x \rceil$ reprezintă cel mai mic număr natural care este mai mare sau egal cu x.

Rezolvarea în timp polinomial.

Vom spune că o problemă se poate rezolva **în timp polinomial**, dacă există un polinom p şi o metodă de calcul prin care se obţine soluţia optimă într-un număr de operaţii ce este mărginit de valoarea $p(L)$, unde L este mărimea problemei.

Bine-nţeles, acest concept este legat de existenţa calculatorului virtual. Chiar dacă un astfel de calculator nu există în mod real, valoarea $p(L)$ pune în evidenţă efortul de calcul necesar pentru rezolvarea problemei. Astfel, timpul de rezolvare a unei probleme va avea o creştere "polinomială în timp" în raport cu mărimea L, şi nu una "exponenţială" în raport cu dimensiunea ei.

3.2.1. Probleme liniare echivalente

Vom considera următoarea problemă de programare liniară:

$$\inf \left\{ c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0} \right\} \tag{PL}$$

unde $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$ şi $rang(A) = m$. Cerinţa ca toate datele problemei să fie numere întregi nu constituie o restrângere a generalităţii, deoarece, din punct de vedere practic, se lucrează oricum numai cu numere raţionale şi amplificarea acestora cu numitorul lor comun, conduce la o problemă în forma de mai sus.

Dacă considerăm problema duală a lui (PL):

$$\sup \left\{ b^\top \cdot u \mid A^\top \cdot u \leq c \right\} \tag{DL}$$

atunci rezolvarea problemelor (PL) şi (DL) este echivalentă cu găsirea unei soluţii a sistemului liniar:

$$\left.\begin{array}{rrl} A \cdot x & & = b \\ x & & \geq \mathbf{0} \\ & A^\top \cdot u & \leq c \\ c^\top \cdot x & -b^\top \cdot u & \leq 0 \end{array}\right\} \tag{SL}$$

Din teoria dualităţii ştim că inegalitatea strictă $c^\top \cdot x - b^\top \cdot u < 0$ nu are loc niciodată, pentru orice x şi u care verifică primele trei condiţii din (SL). Prin urmare, o soluţie $\bar{x}$, $\bar{u}$ a lui (SL) trebuie să verifice $c^\top \cdot \bar{x} - b^\top \cdot \bar{u} = 0$, de unde rezultă că $\bar{x}$ va fi o soluţie optimă a lui (PL), iar $\bar{u}$ o soluţie optimă a problemei duale (DL).

Sistemul liniar (SL) se poate rescrie cu uşurinţă sub forma unui sistem liniar de inegalităţi (orice egalitate este echivalentă cu o pereche de inegalităţi):

$$S \cdot y \leq \beta$$

unde $y = (x, u)^\top \in \mathbb{R}^{n+m}$, iar

$$S = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{m\times m} \\ -A & \mathbf{0}_{m\times m} \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n\times m} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & A^\top \\ c^\top & -b^\top \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \beta = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ \mathbf{0}_n \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece în continuare ne vom ocupa de găsirea unei soluţii a sistemului de inegalităţi, vom nota matricea S tot cu A, iar termenul liber β cu b, fără a face confuzie cu notaţiile de până acum:

$$A \cdot x \leq b \tag{SI}$$

unde $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ şi $b \in \mathbb{Z}^m$.

Dacă L este mărimea problemei (PL), calculată conform relaţiei (3.2.1), atunci mărimea lui (SI) va fi aproximativ $3L$. Concluzia care se desprinde de aici este următoarea:

Observaţia 3.1 *Dacă există un algoritm polinomial în timp care să rezolve sistemul de inegalităţi (SI), atunci şi problema de programare liniară (PL) este rezolvată în timp polinomial.*

Următoarele leme oferă unele rezultate tehnice pe care le vom folosi în justificarea algoritmului elipsoidal.

Lema 3.1 *Dacă $v \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie de bază a sistemului de ecuaţii $A \cdot x = b$, iar L este mărimea acestuia, atunci există numerele întregi $d \neq 0$ şi $d_1, d_2, \ldots, d_n$, astfel încât $v_i = \frac{d_i}{d}$, $i = \overline{1,n}$, iar $|d| < 2^L$ şi $|v_i| < 2^L$.*

Demonstraţie. Deoarece v este o soluţie de bază, există o matrice $B = (A^{i_1} \cdots A^{i_m}) \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, formată din coloane liniar independente ale lui A, astfel încât $\det(B) \neq 0$. Vom lua $d = \det(B)$. Elementele lui A fiind numere întregi, rezultă $d \in \mathbb{Z}$. Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} |d| &\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \left| a_{i_1,\sigma(i_1)} a_{i_2,\sigma(i_2)} \cdots a_{i_m,\sigma(i_m)} \right| \leq m!\,|P| \leq \\ &\leq n!\,|P| \leq n^n\,|P| = 2^{n \log_2 n + \log_2 |P|} < 2^L. \end{aligned}$$

unde $\mathcal{S}_m$ este mulţimea permutărilor de m elemente, iar P produsul tuturor elementelor nenule din A şi b.

Deoarece v este o soluţie de bază, componentele v_i, care nu corespund coloanelor din B, vor fi egale cu zero şi deci puntem considera: $v_i = \frac{0}{d}$. Celelalte componente se pot obţine din regula lui Cramer, rezolvând sistemul $B \cdot x = b$. Astfel, putem scrie: $v_i = \frac{d_i}{d}$, unde d_i este determinantul obţinut din d, în care o anumită coloană este înlocuită cu b. La fel ca mai sus, $|d_i| < 2^L$, şi deoarece $d \neq 0$, rezultă $|d| \geq 1$. Prin urmare, $|v_i| < 2^L$. ■

Lema 3.2 *Dacă v şi w sunt soluţii de bază ale sistemului de ecuaţii $A \cdot x = b$ şi $\left|c^\top \cdot v - c^\top \cdot w\right| \leq 2^{-2L}$, atunci $c^\top \cdot v = c^\top \cdot w$.*

Demonstraţie. Prin reducere la absurd, presupunem $c^\top \cdot v \neq c^\top \cdot w$. Deoarece componentele soluţiilor de bază v şi w sunt numere raţionale cu numitorii mai mici ca 2^L, puntem scrie: $c^\top \cdot v = \frac{N_1}{d_1}$ şi $c^\top \cdot w = \frac{N_2}{d_2}$, unde $|d_1| < 2^L$ şi $|d_2| < 2^L$. Avem:

$$\left|c^\top \cdot v - c^\top \cdot w\right| = \left|\frac{N_1}{d_1} - \frac{N_2}{d_2}\right| = \left|\frac{d_2 N_1 - d_1 N_2}{d_1 d_2}\right|$$

Deoarece $d_2N_1 - d_1N_2 \neq 0$, rezultă $|d_2N_1 - d_1N_2| \geq 1$, şi astfel,

$$\left|c^\top \cdot v - c^\top \cdot w\right| \geq \frac{1}{|d_1d_2|} > 2^{-2L},$$

ceea ce este în contradicţie cu ipoteza din enunţ. ■

Reamintim că prin A_i notăm linia "i" a matricei A. Pentru orice $v \in \mathbb{R}^n$, vom nota

$$\theta_i(v) = A_i \cdot v - b_i$$

Astfel, dacă v satisface inegalitatea a "i"-a, avem $\theta_i(v) \leq 0$.

Lema 3.3 *Pentru orice $v \in \mathbb{R}^n$, există $y \in \mathbb{R}^n$, astfel încât:*

i) $\theta_i(y) \leq \max\{0, \theta_i(v)\}$, pentru orice $i = \overline{1,m}$. Cu alte cuvinte, toate inegalităţile satisfăcute de v nu sunt încălcată de y.

ii) mulţimea vectorială $\{A_i \mid \text{pentru care } \theta_i(y) \geq 0\}$ este un sistem de generatori pentru liniile matricei A.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că, dacă v nu satisface condiţia ii), atunci există un vector v' care satisface i) şi

$$\{i \mid \theta_i(v') \geq 0\} \supsetneqq \{i \mid \theta_i(v) \geq 0\}$$

Reluând un astfel de procedeu de cel mult m ori, obţinem vectorul y cu proprietăţile cerute de lemă.

Vom presupune, după o eventuală reordonare a liniilor lui A, că

$$\begin{aligned} \theta_i(v) &\geq 0 \quad \text{pentru } i = \overline{1,k}, \\ \theta_i(v) &< 0 \quad \text{pentru } i = \overline{k+1,m}. \end{aligned}$$

Deoarece $\{A_1, ..., A_k\}$ nu este un sistem de generatori pentru liniile matricei A, există $l \in \{k+1, ..., m\}$ astfel încât liniile $A_1, ..., A_k, A_l$ să fie liniar independente. Atunci sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} A_i \cdot x &= 0\,, \quad i = \overline{1,k}, \\ A_l \cdot x &= 1 \end{aligned}$$

este compatibil şi are o soluţie $u \in \mathbb{R}^n$. Pentru $\lambda \in \mathbb{R}$, definim vectorul

$$v' = v + \lambda u$$

Deoarece $A_l \cdot u = 1$, putem lua

$$\lambda = \min\left\{ \frac{-\theta_i(u)}{A_i \cdot u} \;\middle|\; A_i \cdot u > 0,\ k+1 \le i \le m \right\}$$

Se observă cu uşurinţă că $0 < \lambda \le -\theta_l(u)$ şi există un indice $i_* \in \{k+1, ..., m\}$ pentru care

$$\theta_{i_*}(v) + \lambda A_{i_*} \cdot u = 0$$

Pe de altă parte, avem:

$$\theta_i(v') = A_i \cdot (v + \lambda u) - b = \theta_i(v) + \lambda A_i \cdot u$$

Din alegerea lui λ, rezultă că pentru orice $i = \overline{1,m}$, avem $\theta_i(v') \le 0$ şi în plus, există un indice $i_* \in \{k+1, ..., m\}$ pentru care avem $\theta_{i_*}(v') = 0$. Astfel, lema este demonstrată. ■

Deoarece algoritmul elipsoidal caută de fapt o soluţie a sistemului de inegalităţi stricte

$$A \cdot x < b' \tag{SIs}$$

unde $b'_i = b_i + \varepsilon$, iar $\varepsilon = 2^{-2L}$ (L fiind mărimea problemei (SI)), teorema care urmează stabileşte o anumită echivalenţă între sistemele (SI) şi (SIs).

Teorema 3.4 *Sistemul de inegalităţi (SI) are o soluţie, dacă şi numai dacă (SIs) are o soluţie. În plus, există un algoritm polinomial în timp care transformă o soluţie a lui (SIs) într-o soluţie pentru (SI).*

Demonstraţie. Evident, orice soluţie a lui (SI) este şi o soluţie pentru (SIs).

Reciporc, fie $v \in \mathbb{R}^n$ o soluţie a lui (SIs):

$$A_i \cdot v < b_i + \varepsilon\,, \quad i = \overline{1,m}.$$

Fie $y \in \mathbb{R}^n$ vectorul obţinut prin Lema 3.3. Dacă $A_i \cdot v < b_i$, atunci ,

$$A_i \cdot y - b_i = \theta_i(y) \le \max\{0, \theta_i(v)\} = 0.$$

Dacă $b_i \le A_i \cdot v < b_i + \varepsilon$, atunci,

$$A_i \cdot y - b_i = \theta_i(y) \le \max\{0, \theta_i(v)\} < \varepsilon.$$

Din cele de mai sus rezultă că

$$A_i \cdot y < b_i + \varepsilon\,, \quad \text{pentru orice } i = \overline{1,m}. \tag{3.2.2}$$

Vom reordona inegalităţile astfel încât

$$\begin{aligned} A_i \cdot y &\geq b_i\,, \quad 1 \leq i \leq p, \\ A_i \cdot y &< b_i\,, \quad p < i \leq m \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

şi deoarece $\{A_1, ..., A_p\}$ este un sistem de generatori al liniilor matricei A, fie $r \leq p$, numărul de linii liniar independente, adică,

$$\{A_1, ..., A_r\} \text{ este o bază pentru liniile lui } A. \tag{3.2.4}$$

Fie $z \in \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului de ecuaţii

$$A_i \cdot x = b_i\,, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Vom arăta că $A \cdot z \leq b$.

Dacă ţinem seama de (3.2.4), pentru orice $k = \overline{1,m}$, putem scrie

$$A_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i \tag{3.2.5}$$

unde coeficienţii $\lambda_i = \frac{d_i}{d}$ se pot obţine aplicând regula lui Cramer. Din Lema 3.1 avem $|d| < 2^L$ şi pentru orice $i = \overline{1,m}$, $|d_i| < 2^L$. Fără a pierde generalitatea, vom presupune că $d > 0$ (schimbând eventual două linii între ele). Avem:

$$A_k \cdot z - b_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{d_i}{d} A_i \cdot z$$

de unde, prin amplificarea cu d, obţinem:

$$d\,(A_k \cdot z - b_k) = \sum_{i=1}^{r} d_i b_i - d b_k \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.6}$$

Pe de altă parte, ţinând seama de (3.2.5) şi (3.2.2), putem scrie:

$$d\,(A_k \cdot z - b_k) \;=\; \sum_{i=1}^{r} d_i b_i + d\left(A_k - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i\right) \cdot y - d b_k =$$

$$= \; -\sum_{i=1}^{r} d_i\,(A_i \cdot y - b_i) + d\,(A_k - b_k) <$$

$$< \; \sum_{i=1}^{r} |d_i|\,\varepsilon + d\varepsilon < (r+1)\,2^L\varepsilon < \frac{r+1}{2^L} < 1$$

Această inegalitate, împreună cu (3.2.6) implică: $d\,(A_k \cdot z - b_k) \le 0$. Deoarece $d > 0$, rezultă

$$A_k \cdot z - b_k \le 0, \quad \text{pentru orice } k = \overline{1,m}$$

şi astfel teorema este demonstrată. ∎

3.2.2. Transformări afine şi elipsoizi

Definiţia 3.1 *Aplicaţia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o transformare afină, dacă există $t \in \mathbb{R}^n$ şi matricea nesingulară $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel încât:*

$$T(x) = t + Q \cdot x.$$

Orice transformare afină este inversabilă. Dacă notăm $y = T(x)$, transformarea inversă este:

$$T^{-1}(y) = Q^{-1} \cdot (y - t)\,.$$

De asemenea, se poate demonstra cu uşurinţă că pentru orice mulţimi $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$, avem:

$$T(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = T(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{B})\,,$$

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})\,.$$

Pentru vectorii $x \in \mathbb{R}^n$ vom considera norma euclidiană

$$\|x\| = \sqrt{x^\top \cdot x}.$$

Definiţia 3.2 *Sfera de centru $c \in \mathbb{R}^n$ şi rază $r > 0$ este mulţimea*

$$S(c,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| \le r\right\}.$$

Definiţia 3.3 *Imaginea sferei unitate $S(\mathbf{0},1)$ printr-o transformare afină $T(x) = t + Q \cdot x$ este un elipsoid:*

$$T(S(\mathbf{0},1)) = \left\{t + Q \cdot x \mid x^\top \cdot x \le 1\right\}.$$

Dacă notăm $y = t + Q \cdot x$, atunci $x = Q^{-1} \cdot (y - t)$, şi prin urmare,

$$\begin{aligned} T(S(\mathbf{0},1)) &= \left\{t + Q \cdot x \mid x^\top \cdot x \leq 1\right\} = \\ &= \left\{y \mid (y-t)^\top \cdot \left(Q^{-1}\right)^\top \cdot Q^{-1} \cdot (y-t) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{y \mid (y-t)^\top \cdot B^{-1} \cdot (y-t) \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

unde am notat $B = Q \cdot Q^\top$.

Deoarece Q este nesingulară, matricea B este simetrică şi pozitiv definită. Reciproc, pentru orice matrice B, simetrică şi pozitiv definită, există o matrice nesingulară Q astfel încât $B = Q \cdot Q^\top$.

Din cele prezentate mai sus rezultă că orice elipsoid E_t este descris de o formă pătratică:

$$E_t = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid (y-t)^\top \cdot B^{-1} \cdot (y-t) \leq 1\right\},$$

unde $t \in \mathbb{R}^n$ este centrul elipsoidului, iar B este o matrice simetrică şi pozitiv definită.

Pentru a înţelege mai bine fenomenul care se petrece prin aplicarea unei transformări afine, să considerăm elipsoidul centrat în originea spaţiului $\mathbb{R}^n$:

$$E_0 = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid y^\top \cdot B^{-1} \cdot y \leq 1\right\}.$$

Fie matricea diagonală $\Lambda = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, unde λ_i, $i = \overline{1,n}$, sunt valorile proprii ale matricei B şi U matricea ortonormală ($U^{-1} = U^\top$), cu liniile formate din vectorii proprii normalizaţi, corespunzători valorilor proprii. Din teoria spectrală se ştie că:

$$B = U^\top \cdot \Lambda \cdot U$$

şi prin urmare avem

$$B^{-1} = U^\top \cdot \Lambda^{-1} \cdot U = \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U\right)^\top \cdot \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U\right),$$

unde $\sqrt{\Lambda^{-1}} = diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$. Ţinând cont de aceste lucruri, putem scrie:

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, y^\top \cdot \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U\right)^\top \cdot \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U\right) \cdot y \leq 1\right\} = \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U \cdot y\right)^\top \cdot \left(\sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U \cdot y\right) \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Dacă notăm $x = \sqrt{\Lambda^{-1}} \cdot U \cdot y$, atunci $y = U^\top \cdot \sqrt{\Lambda} \cdot x$, de unde rezultă

$$E_0 = \left\{ U^\top \cdot \sqrt{\Lambda} \cdot x \;\middle|\; x^\top \cdot x \le 1 \right\}.$$

Interpretând expresia de mai sus, coordonatele unui punct $x \in S(\mathbf{0}, 1)$ sunt scalate fiecare cu factorul $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \le i \le n$, iar după aceea $U^\top$ efectuează o rotaţie asupra lor.

Exemplul 3.1

Să considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, a cărei inversă este $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$. Elipsa cu centrul în sistemul axelor de coordonate, definită de această matrice, este:

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid y^\top \cdot B^{-1} \cdot y \le 1 \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2}{9} y_1^2 - \frac{1}{9} y_1 y_2 + \frac{5}{36} y_2^2 - 1 \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

Valorile proprii şi vectorii proprii normalizaţi ai matricei B sunt:

$$4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad 9 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, avem:

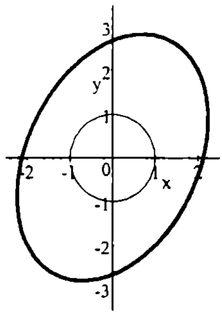
$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

şi deci, elipsa se poate descrie astfel:

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \le 1 \right\},$$

adică, punctele din sfera unitate sunt scalate cu factorul 2 în prima componentă, cu 3 în cea de-a doua componentă, iar apoi se efectuează rotaţia dată de matricea $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. De exemplu, punctul

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de pe sfera unitate, devine $y = \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, şi reprezintă vârful elipsei din cadranul întâi. În figura alăturată sunt reprezentate cercul unitate şi elipsa E_0.



Următoarele rezultate, cunoscute din geometrie şi algebra liniară, vor fi utilizate în demonstraţiile teoremelor care justifică algoritmul elipsoidal.

Propoziţia 3.5 [34, p. 54] *Fiind dată transformarea afină* $T(x) = t + Q \cdot x$ *şi mulţimea* $E \subset \mathbb{R}^n$, *de volum* $vol(E)$, *avem*

$$vol(T(E)) = |\det(Q)| \, vol(E).$$

Propoziţia 3.6 (Gram-Schmidt) *Pentru orice vector* $v \in \mathbb{R}^n$, *există o matrice ortogonală* U *astfel încât:* $U \cdot v = (\|v\|, 0, ..., 0)^\top$.

Pentru $v_0, v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$, vom nota $Co(v_0, v_1, ..., v_n)$ acoperirea convexă a mulţimii $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$.

Propoziţia 3.7 *Dacă mulţimea* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \leq b\}$ *are interiorul nevid, atunci există* $n+1$ *puncte extreme* $v_0, v_1, ..., v_n$ *ale lui* P *pentru care* $vol(Co(v_0, v_1, ..., v_n)) > 0$.

Propoziţia 3.8 *Pentru orice puncte* $v_0, v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$, *avem:*

$$vol(Co(v_0, v_1, ..., v_n)) \geq \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ | & | & | & & | \\ v_0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \right|$$

3.2.3. Algoritmul elipsoidal

Algoritmul elipsoidal al lui Hacian determină o soluţie a sistemului de inegalităţi stricte (SIs) în timp polinimial. Ideea de rezolvare este următoarea: la fiecare iteraţie se construieşte un elipsoid E, care include mulţimea $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x < b\}$. Dacă centrul t al lui E aparţine lui P, atunci t conţine soluţia optimă a problemei de programare liniară şi algoritmul se opreşte. În caz contrar, există o restricţie "i" pentru care $A_i \cdot t \geq b_i$. Această inegalitate defineşte un semispaţiu care trece prin t şi nu-l conţine pe P. Prin urmare,

$$P \subset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i \cdot (x - t) \leq 0\}.$$

Algoritmul construieşte un nou elipsoid E' care va include mulţimea P (mai exact, $E' \supset E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i \cdot (x - t) \leq 0\}$), şi va avea volumul strict mai mic decât cel al lui E: $vol\,(E') < vol\,(E)$.

În acest mod, algoritmul lui Hacian generează un şir de elipsoizi, care conţin mulţimea P şi al căror volum este descrescător, până când centrul unuia aparţine lui P.

În cazul în care mulţimea P este vidă, criteriul de oprire a procedeului descris mai sus se va baza pe faptul că, pentru toate mulţimile de forma lui P, există o margine inferioară $\mu > 0$ a volumelor lor (reamintim că A şi b au componentele numere întregi). Astfel, dacă volumul unui elipsoid devine mai mic decât μ, atunci răspunsul algoritmului va fi: $P = \emptyset$.

În continuare, vom considera că L este mărimea problemei (SIs) şi că la iteraţia k, elipsoidul cu centrul în punctul t_k este definit de matricea pozitiv definită B_k:

$$E_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - t_k)^\top \cdot B_k^{-1} \cdot (x - t_k) \leq 1\right\} \tag{3.2.7}$$

Elipsoidul iniţial va fi sfera de rază $n2^L$, astfel că $S\left(\mathbf{0}, n2^L\right) \supseteq P$.

Algoritmul elipsoidal.

Pasul 0. Luăm $K = 16n\,(n+1)\,L$, $t_0 = \mathbf{0}$, şi $B_0 = n^2 2^{2L} \mathbf{I}_n$.

Pentru $k = \overline{0, K}$, se efectuează operaţiile următoare:

Pasul k.

– Dacă $A \cdot t_k < b$, scrie "soluţia problemei este t_k". STOP.

– Dacă există un indice i pentru care $A_i \cdot t_k \geq b_i$, notăm $a = A_i^\top$ şi calculăm:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{1}{n+1}\frac{B_k \cdot a}{\sqrt{a^\top \cdot B_k \cdot a}} \tag{3.2.8}$$

$$B_{k+1} = \frac{n^2}{n^2-1}\left[B_k - \frac{2}{n+1}\frac{(B_k \cdot a)\cdot(B_k \cdot a)^\top}{a^\top \cdot B_k \cdot a}\right] \tag{3.2.9}$$

Se trece la pasul următor.

Pasul K+1. Scrie "$P = \emptyset$". (Elipsoidul a devenit prea mic ca problema (SIs) să admită soluţii.

Exemplul 3.2

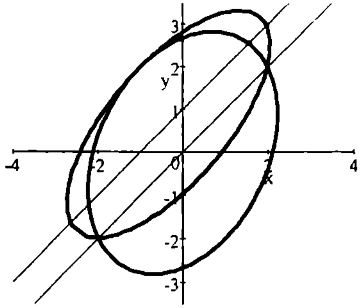
Să presupunem că $B_k = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $t_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ definesc elipsa E_k, iar restricţia încălcată a sistemului de inegalităţi este $x_1 - x_2 < -1$. În această situaţie, avem:

$$B_k \cdot a = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

şi $a^\top \cdot B_k \cdot a = 9$. Efectuând calculele conform relaţiilor (3.2.8) şi (3.2.9), obţinem:

$$t_{k+1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B_{k+1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 52 & 40 \\ 40 & 64 \end{pmatrix}$$

Ar fi suficient ca noua elipsă să includă doar regiunea mărginită de elipsa centrată în origine şi semiplanul deasupra dreptei $x_1 - x_2 = -1$. Deoarece formulele corespunzătoare unei astfel de condiţii ar fi mult prea complicate în cazul general, se preferă ca noua elipsă să includă semielipsa obţinută prin intersecţia dreptei $x_1 - x_2 = 0$, care este paralelă cu restricţia încălcată. Figura alăturată ilustrează situaţia din cazul nostru.



Înainte de a justifica corectitudinea algoritmului descris mai sus, vom demonstra două propoziţii ajutătoare.

Propoziţia 3.9 *Fie $n \geq 2$ şi considerăm mulţimea*

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x-t)^\top \cdot B^{-1} \cdot (x-t) \leq 1 \right\},$$

unde $t = \left(\frac{-1}{n+1}, 0, ..., 0\right)^\top \in \mathbb{R}^n$ *şi*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{(n+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{n^2-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{n^2}{n^2-1} \end{pmatrix}$$

Au loc următoarele:
(a) *matricea B este pozitiv definită (deci, E este un elispoid);*
(b) *semisfera* $HS \stackrel{def}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top \cdot x \leq 1,\ x_1 \leq 0 \right\} \subseteq E$;
(c) $\frac{vol(E)}{vol(S(\mathbf{0},1))} < 2^{\frac{-1}{2(n+1)}}$.

Demonstraţie. (a) Avem evident $B = Q \cdot Q^\top$, unde $Q = \sqrt{B}$ este următoarea matrice nesingulară:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \end{pmatrix}$$

(b) Fie $x \in HS$. Deoarece $x^{\top} \cdot x \leq 1$, rezultă $|x_i| \leq 1$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. În particular, pentru $x_1 \leq 0$, vom avea: $x_1^2 + x_1 \leq 0$. Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned}
(x-t)^{\top} \cdot B^{-1} \cdot (x-t) &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(x_1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 = \\
&= \frac{n^2-1}{n^2} x^{\top} \cdot x + \frac{2n+2}{n^2}\left(x_1^2 + x_1\right) + \frac{1}{n^2} \leq \\
&\leq \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 1,
\end{aligned}$$

deci, $HS \subseteq E$.

(c) Dacă considerăm transformarea afină $T(x) = t + Q \cdot x$, atunci $E = T(S(\mathbf{0}, 1))$. Folosind Propoziţia 3.5, avem:

$$\begin{aligned}
\frac{vol(E)}{vol(S(\mathbf{0},1))} &= |\det Q| = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

Dacă ţinem seama de inegalitatea: $1 + y \leq \exp(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, atunci,

$$\begin{aligned}
|\det Q| &\leq \exp\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{2(n^2-1)}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{-1}{2(n+1)}\right) < 2^{\frac{-1}{2(n+1)}}.
\end{aligned}$$

■

Propoziţia 3.10 *Fie B_k o matrice pozitiv definită şi $t_k \in \mathbb{R}^n$. Fie $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \mathbf{0}$, iar t_{k+1} şi B_{k+1} sunt date de (3.2.8), respectiv de (3.2.9). Notăm*

$$HE_k(a) = E_k \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^{\top} \cdot (x - t_k) \leq 0\right\}$$

unde E_k este elipsoidul definit prin (3.2.7); analog se defineşte şi E_{k+1}. Dacă E şi HS sunt cele din Propoziţia 3.9, atunci există o transformare afină $T(\cdot)$ astfel încât:

(a) $T(S(\mathbf{0},1)) = E_k$;

(b) $T(E) = E_{k+1}$;
(c) $T(HS) = HE_k(a)$.

Demonstraţie. Deoarece matricea B_k este pozitiv definită, există Q_k nesingulară, astfel încât $B_k = Q_k \cdot Q_k^\top$. În baza Propoziţiei 3.6, există matricea ortogonală $U^\top$ (reamintim $U \cdot U^\top = \mathbf{I}$) astfel încât

$$U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a = \left(\left\|Q_k^\top \cdot a\right\|, 0, ..., 0\right)^\top.$$

Definim transformarea afină $T(\,\cdot\,)$ astfel:

$$T(x) = t_k + (Q_k \cdot U) \cdot x \tag{3.2.10}$$

(a) Imaginea sferei unitate prin transformarea definită mai sus, este:

$$\begin{aligned} T(S(\mathbf{0},1)) &= \left\{T(x) \mid x^\top \cdot x \leq 1\right\} = \\ &= \left\{y \mid \left(T^{-1}(y)\right)^\top \cdot \left(T^{-1}(y)\right) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{y \mid (y - t_k)^\top \cdot \left(Q_k^{-1}\right)^\top \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^{-1} \cdot (y - t_k) \leq 1\right\} \\ &= \left\{y \mid (y - t_k)^\top \cdot B_k^{-1} \cdot (y - t_k) \leq 1\right\} = E_k \end{aligned}$$

(b) Pentru a arăta că are loc cea de-a doua egalitate, vom exprima mai întâi matricea B_{k+1} şi vectorul $x - t_{k+1}$ într-o formă echivalentă, ţinând seama că putem scrie $B_k = Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top$.

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= \tfrac{n^2}{n^2-1}\left[B_k - \tfrac{2}{n+1}\tfrac{(B_k \cdot a)\cdot(B_k \cdot a)^\top}{a^\top \cdot B_k \cdot a}\right] = \\ &= \tfrac{n^2}{n^2-1}\left[Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top - \tfrac{2}{n+1}\tfrac{\left(Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)\cdot\left(Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)^\top}{a^\top \cdot Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a}\right] = \\ &= Q_k \cdot U \cdot \left[\tfrac{n^2}{n^2-1}\mathbf{I} - \tfrac{2n^2}{(n^2-1)(n+1)}\tfrac{\left(U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)\left(U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)^\top}{\left\|Q_k^\top \cdot a\right\|^2}\right] \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \end{aligned}$$

Deoarece avem

$$\left(U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)\left(U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a\right)^\top = \begin{pmatrix} \left\|Q_k^\top \cdot a\right\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

rezultă

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= Q_k \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \frac{n^2}{(n+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n^2}{n^2-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{n^2}{n^2-1} \end{pmatrix} \cdot U^\top \cdot Q_k^\top = \\ &= Q_k \cdot U \cdot B \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

unde B este matricea definită în Propoziţia 3.9.

În continuare, avem:

$$\begin{aligned} x - t_{k+1} &= x - t_k + \frac{1}{n+1} \frac{Q_k \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a}{\left\|Q_k^\top \cdot a\right\|} = \\ &= x - t_k - Q_k \cdot U \cdot t \end{aligned}$$

unde $t = \left(\frac{-1}{n+1}; 0; \ldots; 0\right)^\top$ este centrul elipsoidului E. Ţinând seama de (3.2.10), putem scrie: $x - t_k = Q_k \cdot U \cdot T^{-1}(x)$, şi prin urmare,

$$x - t_{k++1} = Q_k \cdot U \cdot \left(T^{-1}(x) - t\right) \tag{3.2.12}$$

Folosind acum relaţiile (3.2.11) şi (3.2.12), rezultă următoarele:

$$\begin{aligned} &T(E) = \left\{T(x) \mid (x-t)^\top \cdot B^{-1} \cdot (x-t) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{x \mid \left(T^{-1}(x) - t\right)^\top \cdot B^{-1} \cdot \left(T^{-1}(x) - t\right) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{x \mid (x - t_{k+1})^\top \cdot \left(Q_k^{-1}\right) \cdot U \cdot B^{-1} \cdot U^\top \cdot Q_k^{-1} \cdot (x - t_{k+1}) \leq 1\right\} = \\ &= \left\{x \mid (x - t_{k+1})^\top \cdot B_{k+1}^{-1} \cdot (x - t_{k+1}) \leq 1\right\} = E_{k+1}. \end{aligned}$$

(c) Pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$ au loc următoarele echivalenţe evidente:

$$x_1 \leq 0 \iff \left\|Q_k^\top \cdot a\right\| x_1 \leq 0 \iff x^\top \cdot U^\top \cdot Q_k^{-1} \cdot a \leq 0.$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} &T\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}\right) = \left\{T(x) \mid x^\top \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a \leq 0\right\} = \\ &= \left\{y \mid \left(T^{-1}(y)\right)^\top \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a \leq 0\right\} = \\ &= \left\{y \mid (y - t_k)^\top \cdot \left(Q_k^{-1}\right)^\top \cdot U \cdot U^\top \cdot Q_k^\top \cdot a \leq 0\right\} = \\ &= \left\{y \mid (y - t_k)^\top \cdot a \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Prin urmare, vom avea:

$$\begin{aligned} T(HS) &= T(S(\mathbf{0},1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0\}) = \\ &= T(S(\mathbf{0},1)) \cap T(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0\}) = \\ &= E_k \cap \left\{y \mid a^\top \cdot (y - t_k) \le 0\right\} = HE_k(a). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.11 *Fie B_k o matrice pozitiv definită şi $t_k \in \mathbb{R}^n$. Dacă $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \mathbf{0}$, iar t_{k+1} şi B_{k+1} sunt date de (3.2.8), respectiv de (3.2.9), atunci,*
(a) *matricea B_{k+1} este pozitiv definită (deci, E_{k+1} este un elipsoid);*
(b) *semielipsoidul $HE_k(a) \subseteq E_{k+1}$;*
(c) $\frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} < 2^{\frac{-1}{2(n+1)}}$.

Demonstraţie. (a) Din Propoziţia 3.10, relaţia (3.2.11), deducem

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= Q_k \cdot U \cdot B \cdot U^\top \cdot Q_k^\top = \\ &= \left(Q_k \cdot U \cdot \sqrt{B}\right) \cdot \left(Q_k \cdot U \cdot \sqrt{B}\right)^\top \end{aligned}$$

şi deoarece evident matricea $Q_k \cdot U \cdot \sqrt{B}$ este nesingulară, rezultă că B_{k+1} este pozitiv definită. În consecinţă, E_{k+1} este un elipsoid.
(b) Din Propoziţia 3.10, punctul (c), avem $HE_k(a) = T(HS)$. Pe de altă parte, din Propoziţia 3.9, punctul (b), $HS \subseteq E$. Deci,

$$HE_k(a) = T(HS) \subseteq T(E) = E_{k+1}.$$

(c) Folosind Propoziţiile 3.5 şi 3.9, punctul (c), avem:

$$\frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{vol(T(E))}{vol(T(S(\mathbf{0},1)))} = \frac{|\det(QU)|\, vol(E)}{|\det(QU)|\, vol(S(\mathbf{0},1))} < 2^{\frac{-1}{2(n+1)}}.$$

■

În continuare vom analiza faptul că, dacă un elipsoid are volumul mai mic decât $2^{-(n+2)L}$, sistemul (SIs) nu admite soluţii.

Propoziţia 3.12 *Mulţimea soluţiilor sistemului (SIs), de mărime L, are volumul mai mare decât $2^{-(n+2)L}$.*

Demonstraţie. Din Teorema 3.4 ştim că, dacă sistemul $A \cdot x < b$ are soluţii, atunci şi $A \cdot x \le b$ va avea soluţii. Dar ultimul sistem de inegalităţi este echivalent cu $A \cdot x + \mathbf{I} \cdot y = b$, $y \geq \mathbf{0}$. Folosind acum Lema 3.1 rezultă că, pentru orice soluţie $z \in \mathbb{R}^n$, avem: $|z_i| < 2^L$ şi $|z_i| > 2^{-L}$, $\forall i = \overline{1,n}$. Prin urmare, mulţimea

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \leq b,\ |x_i| \leq 2^L,\ |x_i| \geq 2^{-L}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$$

are interiorul nevid. Din Propoziţia 3.7 rezultă că există $n+1$ puncte extreme $v_0, v_1, ..., v_n$ ale lui P, astfel încât $vol\,(Co\,(v_0, v_1, ..., v_n)) > 0$.

Din Propoziţia 3.8 avem

$$vol\,(Co\,(v_0, v_1, ..., v_n)) \geq \frac{1}{n!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ | & | & & | \\ v_0 & v_1 & & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\right| > 0$$

Vectorii v_j fiind puncte extreme ale lui P, din Lema 3.1 rezultă că aceştia pot fi scrişi sub forma $v_j = \frac{1}{d_j} u_j$, unde $d_j \in \mathbb{Z}$ şi $u_j \in \mathbb{Z}^n$. Rezultă

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ | & | & & | \\ v_0 & v_1 & & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{|d_0 d_1 \cdots d_n|}\left|\det\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & & d_n \\ | & | & & | \\ u_0 & u_1 & & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\right|$$

Deoarece valoarea determinantului din membrul drept este un număr întreg nenul, rezultă

$$vol\,(Co\,(v_0, v_1, ..., v_n)) \geq \frac{1}{n!}\frac{1}{|d_0 d_1 \cdots d_n|}$$

Ţinând cont de faptul că pentru orice j avem $|d_j| < 2^L$ şi că $n! < 2^L$ (datorită termenului $n\lceil \log_2 n \rceil$ din definiţia lui L), avem:

$$vol\,(P) \geq vol\,(Co\,(v_0, v_1, ..., v_n)) \geq 2^{-(n+2)L}.$$

■

Observaţia 3.2 *Folosind un raţionament similar cu cel de la începutul demonstraţiei de mai sus, din Lema 3.1 se poate deduce cu uşurinţă că, orice soluţie a sistemului (SIs) aparţine sferei* $S\left(\mathbf{0}, n2^L\right) = E_0$, *deoarece fiecare componentă a soluţiei este mărginită în modul de* 2^L.

Propoziţia 3.13 *La iteraţia $K = 16n(n+1)L$ a algoritmului, elipsoidul E_K are volumul $vol(E_k) < 2^{-(n+2)L}$.*

Demonstraţie. Avem:

$$vol(E_K) < vol(E_{K-1})\, 2^{\frac{-1}{2(n+1)}} < \cdots < vol(E_0)\, 2^{\frac{-K}{2(n+1)}} = vol(E_0)\, 2^{-8nL}$$

Deoarece $E_0 \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq n2^L,\ i = \overline{1,n}\right\}$, rezultă $vol(E_0) \leq \left(2n2^L\right)^n$, şi în continuare

$$vol(E_K) < \left(2n2^L\right)^n 2^{-8nL} < 2^{2nL} 2^{-8nL} = 2^{-6nL} < 2^{-(n+2)L}.$$

■

Observaţia 3.3 *Mulţimea soluţiilor sistemului de inegalităţi (SIs), $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x < b\}$, este inclusă în orice elipsoid E_k generat de algoritm. Deoarece $vol(P) \geq 2^{-(n+2)L}$ (Propoziţia 3.12), iar $vol(E_K) < 2^{-(n+2)L}$ (Propoziţia 3.13), rezultă că, dacă nici unul din centrele elipsoizilor generaţi în cele K iteraţii a algoritmului nu aparţine lui P, atunci $P = \emptyset$.*

În încheierea acestei prezentări, trebuie subliniat din nou faptul că toate raţionamentele făcute aici se bazează pe utilizarea unui calculator "ideal", cu aritmetică exactă. Demonstraţia că proprietăţile acestui algoritm se extind şi pentru calculatoarele "reale" este destul de anevoioasă, însă posibilă. Implementarea algoritmului lui Hacian şi folosirea sa la rezolvarea unor probleme reale, au pus în evidenţă viabilitatea lui. Cu toate acestea, *viteza sa de convergenţă* s-a dovedit a fi mai mică în comparaţie cu cea a altor algoritmi, cum ar fi, spre exemplu, cel de punct interior al lui Karmarkar.

3.3. Algoritmul proiectiv

În 1984 Karmarkar [20] a propus un algoritm extrem de inovant pentru rezolvarea problemelor de programare liniară. Acesta a fost primul algoritm de programare liniară în timp polinomial care să concureze în mod viabil cu algoritmul simplex în rezolvarea problemelor de dimensiuni mari, provenite din lumea reală. Spre deosebire de algoritmul simplex, care generează puncte extreme pe frontiera domeniului de admisibilitate, algoritmul lui Karmarkar este o metodă de punct interior. Folosind o tehnică de transformări proiective, el generează în interiorul domeniului de admisibilitate un şir de puncte al căror costuri converg către costul optimal. În final, în urma unui criteriu de oprire, se obţine un punct suboptimal, care prin intermediul unor transformări elementare este adus într-un punct optimal de pe frontiera domeniului de admisibilitate. Prezentarea algoritmului proiectiv a lui Karmarkar, pe care o facem în continuare, se bazează pe articolul lui iniţial [20] şi pe expunerea din [19].

3.3.1. Problema în forma standard Karmarkar

Algoritmul lui Karmarkar rezolvă probleme de programare liniară care au o formă specială, numită *forma standard Karmarkar*. Datele problemei sunt reprezentate de o matrice $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ (matricea coeficienţilor restricţiilor) şi de un vector $c \in \mathbb{Z}^n$ (vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv), unde $\mathbb{Z}$ este mulţimea numerelor întregi.

Vom nota prin $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ vectorul care are toate componentele egale cu 1.

Definiţia 3.4 *Simplexul standard $(n-1)$-dimensional este mulţimea:*

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x \geq \mathbf{0},\ \mathbf{e}^{\mathsf{T}} \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}$$

Vectorul $a_0 = \frac{1}{n}\mathbf{e}$ se numeşte centrul *simplexului.*

Dacă notăm spaţiul liniar:

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}$$

atunci *domeniul de admisibilitate* Π a problemei în formă standard Karmarkar este:

$$\Pi = \Omega \cap \Delta$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că toate cele $m+1$ restricţii care definesc domeniul Π sunt liniar independente.

În plus, forma standard Karmarkar presupune că:

- centrul simplexului este un punct admisibil: $a_0 = \frac{1}{n}\mathbf{e} \in \mathbf{\Pi}$;
- costul $c^\top \cdot x$ este nenegativ pentru orice $x \in \Pi$:

$$\forall x \in \Pi \Rightarrow c^\top \cdot x \geq 0.$$

Cu notaţiile şi ipotezele de mai sus, problema de programare liniară în *forma standard Karmakar* se scrie astfel:

$$\inf \left\{ c^\top \cdot x \,\middle|\, x \in \Omega \cap \Delta \right\}$$

3.3.2. Minimizarea pe sferă

Fie $z \in \mathbb{R}^n$ şi $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Sfera cu centrul* z *şi rază* r este mulţimea:

$$S(z, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq r \right\}$$

Intersecţia unui spaţiu afin de dimensiune nenulă cu o sferă a cărui centru aparţine acestui spaţiu, este o sferă de aceeaşi rază dar de dimensiune mai mică cu o unitate. De exemplu în $\mathbb{R}^3$, intersecţia unui plan ce trece prin centrul unei sfere tridimensionale este un disc, adică o sferă bidimensională.

Să considerăm $z \in \mathbb{R}^n$ cu proprietatea: $A \cdot z = b$ şi

$$S' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \ A \cdot x = b \right\} \cap S(z, r),$$

adică S' este intersecţia unui spaţiu afin cu o sferă având centrul în acel spaţiu.

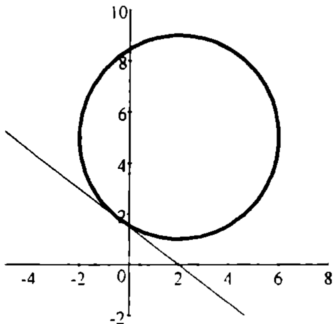
Minimizarea funcţiei liniare $c^\top \cdot x$ peste S' se realizează în felul următor: dacă notăm cu c_p proiecţia lui c pe spaţiul afin $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b \right\}$ atunci $-c_p$ este direcţia din acest spaţiu, de-a lungul căreia funcţia obiectiv descreşte cel mai rapid. Prin urmare, plecând din centrul z al sferei şi deplasându-ne în direcţia $-c_p$ cu un pas de lungimea razei r, determinăm un punct de pe suprafaţa sferei $S(z, r)$ care este punctul de cost minim căutat.

Exemplul 3.3

Să considerăm problema:

$$\min \left\{ 3x_1 + 4x_2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 \leq 16 \right\}$$

Plecând din centrul $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ al sferei în direcţia $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ cu un pas de lungime 4, se obţine punctul de pe sferă $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ care optimizează problema.



Din cele prezentate rezultă că, dacă problemele de programare liniară ar consta din minimizarea unei funcţii liniare peste intersecţia unui spaţiu afin cu o sferă centrată în acest spaţiu, atunci rezolvarea lor ar fi foarte simplă. Vom folosi în continuare această idee pentru a determina un procedeu de rezolvare a problemelor de programare liniară.

3.3.3. Evaluări de regularitate a domeniului de admisibilitate

Să presupunem că dispunem de un punct admisibil z a problemei:

$$\inf\left\{c^{\mathsf{T}}x \mid A \cdot x = b\right\}$$

Dacă este atât de uşor să minimizăm $c^{\mathsf{T}} \cdot x$ peste o sferă de dimensiune mai mică, obţinută ca intersecţie dintre un spaţiu afin şi o sferă centrată în el, de ce nu am încerca să înscriem în interiorul regiunii admisibile o sferă de dimensiune mai mică S centrată în z şi să minimizăm $c^{\mathsf{T}} \cdot x$ peste S? Ar fi de dorit ca sfera S să fie cât mai mare cu putinţă, dar să rămână inclusă în interiorul regiunii admisibile. Dacă S nu este cu mult mai mică decât regiunea admisibilă, minimul peste

S ar putea să nu fie cu mult mai mare decât minimul problemei de la care am plecat. Dacă w este un punct de cost minim în S, atunci costul lui w ar putea fi semnificativ mai mic decât costul punctului iniţial z. Acest proces poate fi repetat, considerând pe w ca punct de plecare.

Se pune următoarea problemă: cât de bună poate fi o astfel de aproximare a soluţiei optime? Din punct de vedere intuitiv, dacă regiunea admisibilă este "rotundă" iar punctul z este "centrul" ei, atunci sfera S centrată în z ar putea conţine "aproape" toate punctele admisibile. În aceste condiţii este de presupus că minimul peste sfera înscrisă S ar putea fi o bună aproximare a optimului. Dacă însă regiunea admisibilă este "lungă şi strâmtă", ca de exemplu un triunghi cu lungimea laturilor de 1, 1000 şi 1000, sfera înscrisă ar putea fi prea mică şi deci optimul peste S să nu aibe nici o relevanţă faţă de optimul problemei.

O măsură naturală a aspectului de *regularitate* (*"sfericitate"*) a domeniului de admisibilitate ar fi raportul dintre raza sferei circumscrise şi raza sferei înscrise a acestuia. Astfel, pentru un domeniu reprezentat de o sferă obţinem un raport egal cu 1, cel mai bun raport posibil; pentru un triunghi isoscel "lung şi strâmt" putem obţine un raport foarte mare, ceea ce sugerează că aproximarea optimului prin procedeul descris mai sus nu este adecvată.

Să formalizăm acum aceste argumente într-un cadru puţin mai general. Fie $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedru şi $z \in P$. Fie $E \subseteq P$ o mulţime convexă închisă cu $z \in E$. (Ne putem imagina E ca fiind o sferă cu centrul z, inclusă în P.) Dorim să evaluăm "cât de bună" este soluţia pe care o vom obţine dacă minimizăm funcţia liniară $c^\top \cdot x$ peste E, în loc să o minimizăm peste mulţimea mai mare şi mai complicată P.

Pentru a obţine o evaluare a aproximării soluţiei optime, vom scala mulţimea E printr-un factor ν suficient de mare, având centrul scalării în z, astfel încât noua mulţime E' să conţină mulţimea P:

$$\begin{aligned} E' &= \{z + \nu(x - z) \mid x \in E\} \\ E &\subseteq P \subseteq E' \end{aligned}$$

Evident, E' are aceeaşi formă ca E. Fiecărui punct $x \in E$ îi corespunde un punct $x' = z + \nu(x - z) \in E'$, şi reciproc.

Fie $c^\top \cdot x_E$ valoarea minimă a lui $c^\top \cdot x$ peste E. Deoarece funcţia $c^\top \cdot x$ este liniară, luând $x_{E'} = z + \nu(x_E - z)$, valoarea minimă a lui $c^\top \cdot x$ peste E' va fi $c^\top \cdot x_{E'}$. În continuare avem:

$$z - x_{E'} = \nu\,(z - x_E)$$

de unde obţinem:

$$c^\top \cdot (z - x_{E'}) = \nu\left[c^\top \cdot (z - x_E)\right]$$

Valoarea care ne interesează este $c^\top \cdot x_P$, minimul lui $c^\top \cdot x$ peste poliedrul P. Deoarece $P \subseteq E'$ avem $c^\top \cdot x_P \geq c^\top \cdot x_{E'}$ şi deci:

$$c^\top \cdot (z - x_P) \leq c^\top \cdot (z - x_{E'}) = \nu\left[c^\top \cdot (z - x_E)\right]$$

Prin urmare, putem scrie:

$$\begin{aligned}
(\nu - 1)\left(c^\top \cdot z\right) - \nu\left(c^\top \cdot x_E\right) &\geq -\left(c^\top \cdot x_P\right)\\
(\nu - 1)\left(c^\top \cdot z\right) - (\nu - 1)\left(c^\top \cdot x_P\right) &\geq \nu\left(c^\top \cdot x_E\right) - \nu\left(c^\top \cdot x_P\right)\\
(\nu - 1)\left[\left(c^\top \cdot z\right) - \left(c^\top \cdot x_P\right)\right] &\geq \nu\left[\left(c^\top \cdot x_E\right) - \left(c^\top \cdot x_P\right)\right]
\end{aligned}$$

Deoarece $c^\top \cdot z > c^\top \cdot x_P$ (optimul nu se atinge în interiorul domeniului), avem:

$$\frac{c^\top \cdot (x_E - x_P)}{c^\top \cdot (z - x_P)} \leq 1 - \frac{1}{\nu} \tag{3.3.1}$$

Diferenţa $c^\top \cdot z - c^\top \cdot x_P$ (exesul de cost) este o măsură care exprimă ”cât de nesatisfăcător” este z, adică cu cât este mai mare costul său faţă de costul optimal $c^\top \cdot x_P$. Punctul x_E este mai bun decât z deoarece excesul său de cost este majorat de cel al lui z înmulţit cu factorul $1 - \frac{1}{\nu}$. Prin urmare, cu cât este mai mic ν, cu atât mai mare este progresul realizat în funcţia obiectiv prin trecerea de la z la x_E. Cu cât P va avea o formă mai apropiată de cea a unei sfere centrate în z, cu atât ν va avea o valoare mai mică şi astfel, el poate fi folosit pentru a exprima *regularitatea* poliedrului.

Subliniăm faptul că în forma standard Karmarkar, domeniul de admisibilitate a problemei este intersecţia unui spaţiu afin cu un simplex, şi prin urmare, vom beneficia de proprietatea că simplexul este un poliedru regulat.

Algoritmul lui Karmarkar are drept punct de plecare pe $z = a_0$ şi generează o succesiune de puncte admisibile a căror costuri converg către 0 (presupunând că costul optimal este 0). Procedeul poate fi descris în felul următor: să considerăm că am determinat un punct curent $a \in \Pi$ pentru care $c^\top \cdot a > 0$ şi vrem să generăm următorul punct b. Pentru aceasta va trebui să înscriem în Π o sferă S centrată în a şi să minimizăm $c^\top \cdot x$ peste S. Este însă puţin probabil ca minimul lui $c^\top \cdot x$ peste S să aproximeze bine adevăratul minim al lui $c^\top \cdot x$ peste Π, deoarece în general Π nu are o formă sferică cu centrul în a. Pentru a înlătura acest inconvenient, Karmarkar a avut o idee strălucită - care de altfel este esenţa întregului algoritm - anume, de a transforma problema dată printr-o aplicaţie T_a astfel încât să se obţină o nouă problemă în care imaginea punctului curent a prin T_a să fie a_0, centrul simplexului Δ. Regiunea admisibilă Π' a noii probleme va fi dată la rândul ei tot de intersecţia simplexului Δ cu un spaţiu afin, întocmai ca şi Π, iar mulţimea Δ este regulată şi are drept centru pe a_0. Aceasta înseamnă că dacă în noua problemă minimizăm peste o sferă înscrisă în Π', vom obţine un punct b' al cărui cost va fi semnificativ mai mic decât cel al lui a_0. Dacă aplicăm lui b' transformarea inversă T_a^{-1}, se obţine un nou punct b din Π. Deoarece costul lui b' în problema transformată este mult mai mic decât cel al lui a_0, în problema originală costul lui b va fi şi el mai mic decât cel al lui a. Prin aplicarea repetată a acestui procedeu se obţine un şir de puncte ale căror costuri vor converge către 0. Evident, această descriere este un pic simplificată şi omite intenţionat unele dificultăţi care apar pe parcurs.

Vom nota cu $S(a_0, r)$ cea mai mare sferă $(n-1)$-dimensională, centrată în a_0, care este inclusă în Δ (sfera înscrisă), şi cu $S(a_0, R)$ cea mai mică sferă $(n-1)$-dimensională, centrată în a_0, care îl conţine pe Δ (sfera circumscrisă).

Lema 3.14 *Razele sferelor $S(a_0, r)$ şi $S(a_0, R)$ sunt date de următoarele formule:*

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad \text{şi} \quad R = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Demonstraţie. *Sfera înscrisă.*

Pentru început vom demonstra următoarea afirmaţie: dacă $y \in \mathbb{R}^n$ satisface condiţiile: $y_i \geq \frac{1}{n}$ pentru $i < n$, $y_n = 0$ şi $y_1+y_2+...+y_n \geq 1$, atunci

$$\|y - a_0\|^2 \geq r^2 = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Fie $z_i = y_i - \frac{1}{n}$ pentru $i = 1, 2, ..., n-1$. Atunci

$$\|y - a_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(y_i - \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n-1} {z_i}^2 + \frac{1}{n^2}.$$

Avem evident $z_i \geq 0$ pentru orice i, iar

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i \geq 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Deoarece $z_i \geq 0$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n-1} z_i \geq \frac{1}{n}$, minimul expresiei $\sum\limits_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \frac{1}{n^2}$ este obţinut dacă $\sum\limits_{i=1}^{n-1} z_i = \frac{1}{n}$ şi toţi z_i sunt identici, adică, $z_i = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$ pentru $i = 1, 2, ..., n-1$. În acest caz:

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)} = r^2.$$

şi afirmaţia noastră este demonstrată.

Distanţa de la a_0 la punctul $\left(0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{n-1}\right)^\top$ de pe frontiera lui Δ este :

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)n^2}} = r$$

astfel încât raza oricărei sfere $(n-1)$-dimensionale incluse în Δ nu poate fi mai mare decât r.

Să demonstrăm acum că orice punct $x \in \mathbb{R}^n$ aparţine lui Δ, dacă satisface condiţiile $\mathbf{e}^\top \cdot x = 1$ şi $\|x - a_0\| \leq r$. Presupunem prin absurd că x satisface condiţiile cerute, dar că există o anumită componentă a sa, să zicem ultima, care este negativă. Definim vectorul $y \in \mathbb{R}^n$ astfel:

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{dacă} \quad i < n \quad \text{şi} \quad x_i \geq \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} - x_i & \text{dacă} \quad i < n \quad \text{şi} \quad x_i < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{dacă} \quad\quad i = n \end{cases}$$

Este uşor de verificat că $y_i \geq \frac{1}{n}$ pentru $i < n$, $y_n = 0$, $\mathbf{e}^\top \cdot y \geq 1$ şi $\|y - a_0\| \leq \|x - a_0\| \leq r$. Dar aceasta contrazice afirmaţia demonstrată mai înainte şi deci prima formulă este demonstrată.

Sfera circumscrisă.

Distanţa de la a_0 la orice punct extremal (vârf) al lui Δ, de exemplu la punctul $(1, 0, \cdots, 0)^\top$, este:

$$\sqrt{(1 - \frac{1}{n})^2 + \frac{n-1}{n^2}} = \sqrt{(n-1)n} = R.$$

Astfel, orice sferă $(n-1)$-dimensională care include pe Δ trebuie să aibe raza cel puţin R. Pentru a completa demonstraţia arătăm că distanţa de la orice punct din Δ la a_0 este cel mult R.

Dacă α şi β sunt numere reale nenegative, este uşor de verificat că

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left[(\alpha + \beta) - \frac{1}{n}\right]^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2$$

Fie $x \in \Delta$. Pentru $i = 2, 3, ..., n$, putem înlocui succesiv componentele x_1 şi x_i ale lui x prin $x_1 + x_i$ şi 0, respectiv. Procedând în acest mod şi ţinând seama de relaţia de mai sus, obţinem puncte din Δ a căror distanţă faţă de a_0 este cel puţin egală sau mai mare decât cea a punctului anterior. În cele din urmă se va obţine punctul $(1, 0, \cdots, 0)^\top$. Deoarece distanţa acestuia faţă de a_0 este R, nici un punct din Δ nu se va afla faţă de a_0 la o distanţă mai mare decât R. Lema este astfel demonstrată. ■

Observaţia 3.4 *Dacă considerăm mulţimea $P = \Delta$ şi luăm $z = a_0$, $E = S(a_0, r)$ şi $E' = S(a_0, R)$, atunci regularitatea simplexului $(n-1)$-dimensional este dată de factorul de scalare $\nu = \frac{R}{r} = n - 1$.*

3.3.4. Transformări proiective

Aşa cum am amintit în paragraful precedent, va trebui să construim o aplicaţie T_a care transformă problema dată într-una nouă, astfel încât imaginea punctului curent a să fie a_0, centrul simplexului Δ. În plus, imaginea lui Δ prin T_a să fie tot Δ, adică, dacă $x \in \Delta$, suma coordonatelor lui $T_a(x)$ să fie egală cu 1. Dacă considerăm vectorul $a \in \mathbb{R}^n$, cu $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, o transformare cu proprietăţile cerute poate fi definită în mod natural astfel:

$$T_a(x) = x' \quad \text{unde} \quad x'_j = \frac{\dfrac{x_j}{a_j}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i}}, \text{ pentru } j = \overline{1,n}.$$

Pentru a rescrie această expresie într-o formă matriceală echivalentă, vom nota matricea diagonală:

$$D = diag\,(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

pentru care evident

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

Cu aceste notaţii, transformarea $T_a(x)$ se defineşte astfel:

$$T_a(x) = \frac{D^{-1} \cdot x}{\mathbf{e}^{\top} \cdot D^{-1} \cdot x}.$$

Vom arăta în continuare că T_a este de fapt o formă specială de tansformare proiectivă.

Definiţia 3.5 *Fie matricea $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vectorii d, $f \in \mathbb{R}^n$ şi $g \in \mathbb{R}$. Dacă matricea $\begin{pmatrix} E & d \\ f^\top & g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ este nesingulară, aplicaţia definită pe $\mathbb{R}^n$ pentru care $f^\top \cdot x + g \neq 0$ şi $x \mapsto \dfrac{E\cdot x + d}{f^\top \cdot x + g}$, se numeşte* transformare proiectivă.

Fie $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice nesingulară arbitrară şi luăm $d = 0$, $g = 1$ şi $f^\top = \mathbf{e}^\top \cdot (E - \mathbf{I}_n)$. Atunci, deoarece E este nesingulară, $d = 0$ şi $g \neq 0$, aplicaţia $x \mapsto \dfrac{E\cdot x}{f^\top \cdot x + 1} = \dfrac{E\cdot x + d}{f^\top \cdot x + g}$ este o transformare proiectivă. Fie $\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{e}^\top \cdot x = 1\right\}$. Pentru $x \in \Sigma$ avem:

$$\frac{E\cdot x + d}{f^\top \cdot x + g} = \frac{E\cdot x}{\mathbf{e}^\top \cdot E \cdot x - \mathbf{e}^\top \cdot x + 1} = \frac{E\cdot x}{\mathbf{e}^\top \cdot E \cdot x}$$

Cu alte cuvinte, pentru $x \in \Sigma$ şi orice matrice E nesingulară, aplicaţia $x \mapsto \dfrac{E\cdot x}{\mathbf{e}^\top \cdot E \cdot x}$ este o transformare proiectivă pe Σ. În cazul nostru, deoarece $a > \mathbf{0}$, D^{-1} este o matrice diagonală, cu diagonala pozitivă şi astfel este evident nesingulară. Prin urmare, aplicaţa $T_a\left(x\right)$ definită mai sus este o transformare proiectivă.

Imaginea simplexului Δ prin transformarea T_a este chiar Δ. Într-adevăr, dacă $x \in \Delta$, atunci $x \geq \mathbf{0}$ şi de aici, $T_a(x) \geq \mathbf{0}$. De asemenea, suma componentelor lui $T_a(x)$ este: $\mathbf{e}^\top \cdot T_a(x) = \dfrac{\mathbf{e}^\top \cdot D^{-1} \cdot x}{\mathbf{e}^\top \cdot D^{-1} \cdot x} = 1$. Pe de altă parte, T_a este bijectivă deoarece aplicaţia $x' \mapsto \dfrac{D\cdot x'}{\mathbf{e}^\top \cdot D \cdot x'}$ definită pe Δ este inversa lui T_a. Prin urmare, dacă $x \in \Delta$ şi $T_a\left(x\right) = x'$, atunci:

$$T_a^{-1}\left(x'\right) = \frac{D\cdot x'}{\mathbf{e}^\top \cdot D \cdot x'}.$$

adică,

$$T_a^{-1}\left(x'\right) = x \quad \text{unde} \quad x_j = \frac{a_j x'_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x'_i} \text{ pentru } j = \overline{1,n}.$$

Dacă notăm cu A^j coloana j a maricei A, putem scrie:

$$\sum_{j=1}^{n} A^j x_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{a_j x'_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x'_i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (A^j a_j) x'_j = \mathbf{0}$$

Deoarece $A \cdot D$ este o matrice de dimensiune $(m \times n)$, cu coloanele de forma $A^j a_j$, avem $A \cdot x = 0$ dacă şi numai dacă $A \cdot D \cdot x' = 0$. Reamintim că $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$. Prin urmare, dacă notăm

$$\Omega' = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot D \cdot x' = 0\}$$

deducem că $T_a(\Omega) = \Omega'$. În plus. pentru orice $a \in \Omega$ avem

$$T_a(a) = a_0 \in \Omega'.$$

Deoarece $T_a(\Delta) = \Delta$ şi $T_a(\Omega) = \Omega'$ iar T_a este inversabilă, avem:

$$T_a(\Delta \cap \Omega) = \Delta \cap \Omega'$$

Aceasta înseamnă că imaginea domeniului de admisibilitate Π a problemei originale prin transformarea proiectivă T_a este $\Delta \cap \Omega'$. Vom nota $\Pi' = T_a(\Pi) = \Delta \cap \Omega'$.

Din felul în care au fost definite cele două sfere $S(a_0, r)$ şi $S(a_0, R)$ rezultă că:

$$S(a_0, r) \subseteq \Delta \subseteq S(a_0, R)$$

şi deci. dacă intersectăm aceste mulţimi cu Ω, imaginea prin T_a va fi:

$$S(a_0, r) \cap \Omega' \subseteq \Delta \cap \Omega' \subseteq S(a_0, R) \cap \Omega'$$

Deoarece Ω' este un spaţiu afin care îl conţine pe a_0, sferele $S(a_0, r) \cap \Omega'$ şi $S(a_0, R) \cap \Omega'$ au dimensiunea cel mult $n-1$ şi sunt de raze r respectiv R. Vom nota:

$$\begin{aligned} S'(a_0, r) &= S(a_0, r) \cap \Omega' \\ S'(a_0, R) &= S(a_0, R) \cap \Omega' \end{aligned}$$

Prin urmare avem:

$$S'(a_0, r) \subseteq \Pi' \subseteq S'(a_0, R)$$

iar $\nu = \frac{R}{r} = n - 1$. Deci Π' este un domeniu mărginit, fapt pentru care vom putea aproxima minimizarea unei funcţii liniare peste Π' prin minimizarea acesteia peste sfera $S(a_0, r)$ înscrisă în Π', excesul de cost având factorul egal cu $1 - \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{n-1}$.

Prin aplicarea unei astfel de transformări proiective apare totuşi o problemă, anume, că funcţia obiectiv, care este liniară în problema iniţială, devine neliniară prin transformarea T_a. Scopul nostru este să minimizăm $c^\top \cdot x$ pentru $x \in \Pi$. Deoarece

$$c^\top \cdot x = c^\top \cdot T_a^{-1}(x') = \frac{\sum_{j=1}^{n} (c_j a_j) x'_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i};$$

minimizarea lui $c^\top \cdot x$ pentru $x \in \Pi$ este echivalentă cu minimizarea lui $\frac{\sum_{j=1}^{n} (c_j a_j) x'_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i}$ pentru $x' \in \Pi'$. Dar expresia din urmă este o funcţie neliniară în x', astfel că în descrierea simplistă a algoritmului lui Karmarkar făcută mai înainte, ar trebui de fapt să minimizăm o funcţie raţională peste un poliedru. Vom arăta în continuare că este totuşi suficient dacă aproximăm funcţia raţională doar cu numărătorul său $\sum_{j=1}^{n} (c_j a_j) x'_j$, care este liniar în x'.

3.3.5. O funcţie potenţial aproape invariantă

În acest paragraf vom arăta că, prin minimizarea succesivă a funcţiilor de tipul $\sum_{j=1}^{n} (c_j a_j) x'_j$, se poate găsi un minim global al problemei iniţiale. Trebuie precizat că, chiar dacă costurile punctelor generate vor converge către 0, ele nu vor avea neapărat o descreştere monotonă. Prin intermediul unei funcţii potenţial vom demonsta că, după un număr suficient de mare de iteraţii, costul $c^\top \cdot x$ a problemei va descreşte substanţial, chiar dacă pentru anumiţi paşi valoarea acestuia ar putea fi crescătoare.

Dacă $c^\top \cdot x$ este funcţia obiectiv iniţială, pentru $x \in \Pi$, $c^\top \cdot x > 0$

şi $x > 0$, definim funcţia potenţial:

$$f(x) = \ln\left[\frac{(c^{\top} \cdot x)^n}{x_1 x_2 \cdots x_n}\right]$$

Deoarece produsul componentelor $x_1 x_2 \cdots x_n < 1$, avem evident:

$$(c^{\top} x)^n \leq \frac{(c^{\top} \cdot x)^n}{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{f(x)}$$

şi deci $c^{\top} \cdot x \leq e^{\frac{f(x)}{n}}$. Prin urmare, dacă $f(x)$ descreşte către $-\infty$, atunci $c^{\top} \cdot x$ va converge către 0. În acest mod funcţia f poate fi folosită pentru a evalua progresul realizat de-a lungul iteraţiilor.

Vom arăta că este suficient să "minimizăm aproximativ" o funcţie liniară pentru ca $f(x) \to -\infty$ şi că este suficient să determinăm la fiecare iteraţie un punct nou b pentru care $f(b) \leq f(a) - \delta$ (unde $\delta > 0$ este o constantă) pentru a garanta convergenţa în timp polinomial a algoritmului.

Pentru calculul valorilor funcţiei f, va trebui să extindem operaţiile elementare ale calculatorului virtual şi pentru determinarea valorii logaritmului natural. Practic, există rutine performante care aproximează orice valoare a acestiuia doar prin operaţii cu numere raţionale. Din această cauză vom considera calculul logaritmului natural ca fiind făcut şi el într-o unitate de timp.

Notăm:

$$c' = D \cdot c = \begin{pmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \\ \vdots \\ a_n c_n \end{pmatrix}$$

şi definim:

$$f'(y) = \ln\left[\frac{(c'^{\top} \cdot y)^n}{y_1 y_2 \cdots y_n}\right]$$

pentru $y \in \Pi'$, $c'^{\top} \cdot y > 0$ şi $y > 0$. Aşa cum s-a arătat mai înainte, minimizarea lui $c^{\top} \cdot x$ peste Π revine la minimizarea lui $\dfrac{\sum (c_j a_j)\, y_j}{\sum a_i y_i}$ pentru $y \in \Pi'$. Deci, f' ar putea fi funcţia potenţial în problema transformată, dacă funcţia obiectiv a acesteia ar fi doar $c'^{\top} \cdot y$.

Următoarea lemă arată că funcţia potenţial este aproape invariantă în raport cu T_a, adică diferenţa $f'(T_a(x)) - f(x)$ nu depinde de x.

Lema 3.15 *Pentru orice* $x \in \Pi$, *dacă* $c^\top \cdot x > 0$ *şi* $x > 0$ *atunci*

$$f'(T_a(x)) = f(x) + \ln(a_1 a_2 \cdots a_n).$$

Demonstraţie. Dacă $c^\top \cdot x > 0$ şi $x > 0$ atunci ambele valori $f'(T_a(x))$ şi $f(x)$ există. Folosind relaţiile de definiţie ale lui T_a şi f', obţinem:

$$f'(T_a(x)) = \ln \frac{\left[c^\top \cdot D^\top \cdot (\frac{D^{-1}x}{e^\top D^{-1}x})\right]^n}{\frac{\frac{x_1}{a_1} \frac{x_2}{a_2} \cdots \frac{x_n}{a_n}}{(e^\top \cdot D^{-1} \cdot x)^n}} = f(x) + \ln(a_1 a_2 \cdots a_n).$$

■

Pentru a determina un nou punct din secvenţa descrisă la pagina 126, vom proceda astfel: fiind cunoscut punctul curent $a \in \Pi$, vom folosi transformarea proiectivă T_a pentru a duce pe a în centrul a_0 a simplexului Δ. Folosind tehnica de optimizare pe sfera înscrisă în Δ, determinăm un punct $b' \in \Pi'$ pentru care $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$. Apoi aplicăm lui b' transformarea inversă T_a^{-1} şi obţinem punctul $b \in \Pi$. Deoarece f este "aproape invariantă" deducem $f(b) \leq f(a) - \delta$:

$$\begin{aligned} f(b) &= f'(b') - \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) \leq \\ &\leq (f'(a_0) - \delta) - \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \\ &= f(a) - \delta. \end{aligned}$$

Acesta este "progresul" ce se face la o iteraţie. De-a lungul iteraţiilor, valoarea lui f va tinde către $-\infty$, deoarece la fiecare iteraţie valoarea lui f descreşte cu δ.

3.3.6. Algoritmul lui Karmarkar

Vom nota cu L mărimea problemei de programare liniară în formă standard Karmarkar, care este numărul

$$L = (m+1)n + \lceil \log_2 |P| \rceil + n \lceil \log_2 n \rceil$$

unde m, n sunt dimensiunile matricei A, iar P este produsul tuturor coeficienţilor nenuli din problemă.

Fie $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ un numă real oarecare şi fie

$$\delta = \alpha - \frac{\alpha^2}{1-\alpha} > 0.$$

Vom arăta în continuare că algoritmul lui Karmarkar rezolvă în timp polinomial orice problemă în formă standard.

Pentru a descrie mai uşor algoritmul, vom face apel la o funcţie Φ, care generează şirul de puncte din interiorul domeniului Π, adică $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$. Vom considera că Φ are următoarele proprietăţi:

dacă $a \in \Pi$, $a > \mathbf{0}$ şi $c^\top \cdot a > 0$, atunci $\Phi(a) \in \Pi$, şi $\Phi(a) > \mathbf{0}$;

-dacă problema are costul optim egal cu 0, atunci ori $c^\top \cdot \Phi(a) = 0$, ori $f(\Phi(a)) \leq f(a) - \delta$.

Definirea funcţiei Φ şi demonstarea proprietăţilor sale o vom face imediat după expunerea şi justificarea algoritmului.

Algoritmul lui Karmarkar.

Iteraţia 0. Se consideră $x^{(0)} = a_0 = \frac{1}{n}\mathbf{e}$ şi fie $K = \left\lceil \frac{2nL}{\delta} \right\rceil$ (numărul maxim de iteraţii).

Dacă $c^\top \cdot a_0 = 0$, atunci o soluţie optimă este a_0. STOP.

Dacă $c^\top \cdot a_0 > 0$, atunci se efectuează iteraţiile următoare, pentru $k = \overline{1, K}$:

Iteraţia k.

- Cu ajutorul funcţiei Φ se generează $x^{(k)} = \Phi(x^{(k-1)})$.
- Dacă $c^\top \cdot x^{(k)} = 0$, atunci o soluţie optimă este $x^{(k)}$. STOP.
- Dacă $f(x^{(k)}) > f(x^{(k-1)}) - \delta$, atunci problema are costul optim pozitiv. STOP.

Iteraţia K+1. Găseşte un punct extremal $v \in \Pi$ al cărui cost nu este mai mare decât $c^\top \cdot x^{(K)}$. În acest caz, v este o soluţie de bază optimă, adică: $c^\top \cdot v = 0$.

Teorema 3.16 *Presupunem că:*

-pentru orice $a \in \Pi$, $a > \mathbf{0}$ şi $c^\top \cdot a > 0$, avem $\Phi(a) \in \Pi$, şi $\Phi(a) > \mathbf{0}$;

– dacă costul minim al problemei este 0, atunci ori $c^\top \cdot \Phi(a) = 0$, ori $f(\Phi(a)) \leq f(a) - \delta$.

În aceste condiţii algoritmul lui Karmarkar rezolvă corect problemele de programare liniară în forma standard Karmarkar.

Demonstraţie. Singura situaţie în care algoritmul poate semnala un cost optim pozitiv este la iteraţia k, dacă costul $c^\top \cdot x^{(k)} > 0$ şi $f(x^{(k)}) > f(x^{(k-1)}) - \delta$. În acest caz, datorită ipotezei făcute asupra lui Φ, ştim că problema are un cost optim pozitiv.

Dacă condiţia $c^\top \cdot x^{(k)} = 0$ este verificată, atunci evident $x^{(k)}$ este o soluţie optimă a problemei.

Să presupunem acum că pentru orice $k = 1, 2, \ldots, K$, avem $f(x^{(k)}) \leq f(x^{(k-1)}) - \delta$. Atunci

$$f\left(x^{(K)}\right) \leq f\left(x^{(0)}\right) - \left(\frac{2nL}{\delta}\right)\delta = f\left(x^{(k)}\right) \leq f\left(x^{(0)}\right) - 2nL$$

şi

$$c^\top x^{(K)} \leq e^{\frac{f\left(x^{(K)}\right)}{n}} \leq e^{\frac{f\left(x^{(0)}\right)-2nL}{n}}.$$

Deoarece $x^{(0)} = a_0$ deducem că:

$$f(x^{(0)}) = \ln\left[\frac{\left(c^\top \cdot a_0\right)^n}{\left(\frac{1}{n}\right)^n}\right] = n\ln(nc^\top \cdot a_0) = n\ln(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$$

Dar, se poate arăta cu uşurinţă că $\ln(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \leq L$, astfel încât avem $f\left(x^{(0)}\right) \leq nL$. Rezultă $\frac{f\left(x^{(0)}\right)-2nL}{n} \leq -L$. Prin urmare,

$$c^\top \cdot x^{(K)} \leq e^{-L} < 2^{-L}.$$

În acest caz, fie $v \in \Pi$ punctul extremal obţinut la iteraţia $K+1$ (soluţia de bază v se poate determina cu ajutorul Teoremei fundamentale a programării liniare). Conform Lemei 3.1, soluţia de bază v este un vector cu toate componentele raţionale, având numitorul comun pozitiv şi mai mic ca 2^L. Prin urmare, dacă $c^\top \cdot v > 0$, atunci $c^\top \cdot v > 2^{-L}$. Însă, pe de altă parte, avem: $0 \leq c^\top \cdot v \leq c^\top \cdot x^{(K)} < 2^{-L}$, ceea ce implică $c^\top \cdot v = 0$.

În concluzie, algoritmul lui Karmarkar determină un punct de cost 0, dacă există unul, sau semnalează că un astfel de punct nu există. ■

Ne vom ocupa în continuare de construcţia unei funcţii Φ cu proprietăţile cerute de algoritm.

Caracteristica principală a lui Φ este de a duce printr-o transformare proiectivă, un punct a din interiorul lui Π în centrul $a_0 \in \Pi'$ a simplexului Δ, apoi, de a găsi un punct $b' \in \Pi'$ astfel încât $f'(b') \leq f'(a_o) - \delta$ şi în final, prin aplicarea transformării inverse, de a determina punctul $b \in \Pi$.

Domeniul transformat Π' are, aşa cum am arătat mai înainte, o formă bună de regularitate cu centrul în a_0. Acest lucru justifică alegerea lui b' ca soluţie optimă în minimizarea lui $c'^{\top} \cdot y$ pe sfera $S'(a_0; r) \subseteq \Pi'$. Problema care poate să apară aici este următoarea: aflându-se pe frontiera sferei, anumite componente ale lui b' pot fi zero şi în acest caz, evaluarea progresului nu mai este posibilă prin intermediul funcţiei potenţial f', care este definită pentru vectori cu toate componentele strict pozititve.

Pentru a evita acest inconvenient, va trebui să ne asigurăm că b' rămâne strict în interiorul domeniului Π', astfel că vom efectua minimizarea pe sfera $S'\left(a_0, \dfrac{\alpha}{n}\right)$, pentru care raza este

$$\frac{\alpha}{n} < \frac{\alpha}{\sqrt{n(n-1)}} < \alpha r < \frac{r}{2}.$$

Cu această alegere a lui b' vom putea demonstra că $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$.

Introducem următoarele notaţii:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{e}^{\top} \cdot x = 1\right\}, \\ \overline{\Omega} &= \Omega' \cap \Sigma, \\ B &= \begin{pmatrix} A \cdot D \\ \mathbf{e}^{\top} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Evident, $a_0 \in \overline{\Omega}$, iar B este o matrice de dimensune $(m+1) \times n$, obţinută prin adăugarea unei linii la cele ale lui $A \cdot D$. De asemenea, putem scrie

$$\overline{\Omega} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot x = e^{(m+1)}\right\}$$

unde $e^{(m+1)}$ este vectorul unitar, de dimeniune $m+1$, care are 1 pe ultima poziţie.

Modul în care funcţia Φ asociază punctului $a \in \Pi$, vectorul $b = \Phi(a) \in \Pi$, este următorul:

Funcţia Φ.

1. Fie $a \in \Pi$, $a > 0$, şi matricea diagonală $D = diag\,(a)$.
   Se determină vectorul $c' = D \cdot c$ şi matricea $B = \begin{pmatrix} A \cdot D \\ \mathbf{e}^\top \end{pmatrix}$.
2. Se calculează vectorul c_p, proiecţia lui c' pe spaţiul nul al lui B:
$$c_p = c' - B^\top \cdot (B \cdot B^\top)^{-1} \cdot B \cdot c'.$$
   şi se determină vectorul
$$\hat{c}_p = \begin{cases} \dfrac{c_p}{\|c_p\|} & \text{dacă} \quad c_p \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad c_p = 0 \end{cases}$$
3. Se calculează vectorul
$$b' = a_0 - \frac{\alpha}{n}\hat{c}_p$$
   care se obţine plecând din a_0 cu un pas de lungime $\frac{\alpha}{n}$ în direcţia $-c_p$ (optimizarea pe sferă).
4. Se calculează
$$b = T_a^{-1}(b') = \frac{D \cdot b'}{e^\top \cdot D \cdot b'}$$

În continuare vom demonstra că funcţia Φ astfel definită are proprietăţile cerute de algorimul lui Karmarkar.

Propoziţia 3.17 *Proiecţia vectorului $c' = D \cdot c$ pe spaţiul nul al lui B este*
$$c_p = c' - B^\top \cdot (B \cdot B^\top)^{-1} \cdot B \cdot c'.$$

Demonstraţie. Matricea diagonală D fiind evident inversabilă, avem $rang\,(A \cdot D) = rang\,(A) = m$. Ultima linie a matricei B este $\mathbf{e}^\top$ şi aceasta nu poate fi dependentă de celelalte, pentru că altfel, $(A \cdot D) \cdot a_0 = 0$ ar implica $\mathbf{e}^\top \cdot a_0 = 0$, ceea ce este evident fals. Prin urmare, $rang\,(B) = m + 1$.

Pentru ca $\left(B \cdot B^{\top}\right)^{-1}$ să existe, este suficient să arătăm că matricea $B \cdot B^{\top}$, de dimensiune $(m+1) \times (m+1)$, are coloanele liniar independente. Prin absurd, să presupunem că există $y \in \mathbb{R}^{m+1}$, $y \neq \mathbf{0}$, astfel încât $\left(B \cdot B^{\top}\right) \cdot y = \mathbf{0}$. Atunci $y^{\top} \cdot (B \cdot B^{\top}) \cdot y = 0$, adică, $(B^{\top} \cdot y)^{\top} \cdot (B^{\top} \cdot y) = \left\|B^{\top} \cdot y\right\|^2 = 0$ şi de aici rezultă $B^{\top} \cdot y = \mathbf{0}$, o combinaţie liniară netrivială a liniilor lui B egală cu zero, ceea ce contrazice faptul că $rang\,(B) = m+1$.

Evident, c_p este în spaţiul nul al lui B, deoarece

$$B \cdot c_p = B \cdot \left(c' - B^{\top} \cdot (B \cdot B^{\top})^{-1} \cdot B \cdot c'\right) = B \cdot c' - B \cdot c' = \mathbf{0}$$

Dacă notăm vectorul $v = (B \cdot B^{\top})^{-1} \cdot B \cdot c'$, atunci $c' - c_p = B^{\top} \cdot v$, adică, $c' - c_p$ este situat în spaţiul generat de liniile lui B.

Deoarece c' poate fi scris ca suma dintre vectorul c_p din spaţiul nul al lui B şi a vectorului $(c' - c_p)$ din spaţiul generat de liniile lui B, rezultă că c_p este proiecţia lui c' pe spaţiul nul al lui B. ■

Propoziţia 3.18 *Vectorul $b' = a_0 - \frac{\alpha}{n}\hat{c}_p$ minimizează $c'^{\top} \cdot x$ peste mulţimea $S(a_0, \frac{\alpha}{n}) \cap \overline{\Omega}$.*

Demonstraţie. Deoarece $a \in \Pi$ şi $B \cdot \hat{c}_p = \mathbf{0}$, avem

$$\begin{aligned} B \cdot b' &= B \cdot a_0 - \frac{\alpha}{n} B \cdot \hat{c}_p = \begin{pmatrix} A \cdot D \cdot a_0 \\ \mathbf{e}^{\top} \cdot a_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} A \cdot a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{(m+1)}, \end{aligned}$$

deci, $b' \in \overline{\Omega}$. Pentru orice $x \in S(a_0, \frac{\alpha}{n}) \cap \overline{\Omega}$, avem, $B \cdot x = e^{(m+1)}$, şi prin urmare, $B \cdot (b' - x) = \mathbf{0}$.

Doarece c_p este proiecţia lui c' pe spaţiul nul al lui B, $c' - c_p$ este ortogonal pe orice vector din spaţiul nul al lui B, în particular şi pe $b' - x$. Astfel $(c' - c_p)^{\top} \cdot (b' - x) = 0$, de unde rezultă:

$$\begin{aligned} c'^{\top} \cdot (b' - x) &= c_p^{\top} \cdot (b' - x) = \|c_p\|\, \hat{c}_p^{\top} \cdot \left[a_0 - \frac{\alpha}{n}\hat{c}_p - x\right] = \\ &= \|c_p\| \left[\hat{c}_p^{\top} \cdot (a_0 - x) - \frac{\alpha}{n}\right]. \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Schwartz şi ţinând cont de faptul că $\|c_p\|$ este 0 sau 1, iar $x \in S(a_0, \frac{\alpha}{n})$, avem

$$\hat{c}_p^{\top} \cdot (a_0 - x) \leq \|c_p\| \, \|a_0 - x\| \leq \frac{\alpha}{n}$$

Prin urmare, $c'^{\top} \cdot (b' - x) \leq 0$, adică, $c'^{\top} \cdot b' \leq c'^{\top} \cdot x$ pentru orice $x \in S(a_0, \frac{\alpha}{n}) \cap \overline{\Omega}$. ■

Propoziţia 3.19 *Fie b' un punct care minimizează $c'^{\top} \cdot x$ peste $\overline{\Omega} \cap S(a_0, \frac{\alpha}{n}) = \Pi' \cap S(a_0, \frac{\alpha}{n})$. Presupunem că în problema iniţială avem costul minim egal cu 0, şi că $c'^{\top} \cdot a_0 > 0$. Atunci*

$$\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0} \leq 1 - \frac{\alpha}{nR} \quad \text{şi} \quad \left(\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0}\right)^n \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{R}\right)$$

(unde $R = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ este raza sferei circumscrise lui Δ).

Demonstraţie. Deoarece $\overline{\Omega}$ este un spaţiu afin, avem

$$S(a_0, \frac{\alpha}{n}) \cap \overline{\Omega} \subseteq \Pi' \subseteq S(a_0, R) \cap \overline{\Omega},$$

iar $a_0 \in \overline{\Omega}$. Putem astfel evalua regularitatea mulţimii $P = \Pi'$ cu ajutorul mulţimilor $E = S(a_0, \frac{\alpha}{n}) \cap \overline{\Omega}$ şi $E' = S(a_0, R) \cap \overline{\Omega}$, pentru care factorul de scalare este $\nu = \frac{R}{\alpha / n}$. Din ipoteză, costul minim în problema iniţială este 0 şi deci, valoarea minimă a lui $c'^{\top} \cdot x$ peste mulţimea Π' este de asemenea 0. În aceste condiţii, din formula (3.3.1) obţinem

$$\frac{c'^{\top} \cdot b' - 0}{c'^{\top} \cdot a_0 - 0} \leq 1 - \frac{1}{\nu} = 1 - \frac{\frac{\alpha}{n}}{R}.$$

Din faptul că $1 + t \leq \exp(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, deducem că

$$\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0} \leq 1 - \frac{\frac{\alpha}{n}}{R} \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{nR}\right)$$

şi de aici rezultă

$$\left(\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0}\right)^n \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{R}\right).$$

■

Propoziţia 3.20 *Fie* $b' = a_0 - \frac{\alpha}{n}\hat{c}_p$, *cu* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *şi* $\|\hat{c}_p\| = 1$. *Dacă notăm*

$$\rho = \frac{b'_1 \cdots b'_n}{(\frac{1}{n})^n} = \prod_{j=1}^{n}(nb'_j)$$

atunci, are loc relaţia:

$$\ln\frac{1}{\rho} \leq \frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Demonstraţie. Fie vectorul $u = na_0 - nb' = \mathbf{e} - nb'$; atunci, pentru orice j, componenta $u_j = 1 - nb'_j$. Astfel, putem scrie

$$\rho = \prod_{j=1}^{n}(1 - u_j). \tag{3.3.2}$$

Deoarece $b' \in \Sigma$, avem

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = 0.$$

Pe de altă parte, din ipoteză rezultă $\|a_0 - b'\| = \frac{\alpha}{n}$. Din $\|u\| = n\|a_0 - b'\| = n\frac{\alpha}{n} = \alpha$ deducem că $\|u\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2 = \alpha^2$ şi deci, $|u_j| < \alpha$ pentru toţi j.

Folosind inegalitatea mediilor (media geometrică este mai mică sau egală cu media aritmetică), din (3.3.2) rezultă

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-u_j}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-u_j},$$

de unde obţinem

$$\frac{1}{\rho} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-u_j}\right)^n$$

Deoarece $|u_j| \leq \alpha$, suma puterilor, pentru $k \geq 2$, se poate evalua în modul următor:

$$\sum_{j=1}^{n}|u_j^k| \leq \sum_{j=1}^{n}\alpha^{k-2}u_j^2 = \alpha^k \tag{3.3.3}$$

(Aceasta este o evaluare mai fină decât cea evidentă $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|u_j^k\right| \leq n\alpha^k$).

Avem:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-u_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k = \sum_{j=1}^{n}\left[1+u_j+\sum_{k=2}^{\infty} u_j^k\right] = n+0+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty} u_j^k$$

Dar

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty} u_j^k \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty} \left|u_j^k\right| = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \left|u_j^k\right|,$$

şi deoarece din (3.3.3) avem $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|u_j^k\right| \leq \alpha^k$, rezultă

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty} u_j^k \leq \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Prin urmare, avem:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-u_j} \leq n + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

şi deci,

$$\frac{1}{\rho} \leq \left(\frac{1}{n}\left(n+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n\,(1-\alpha)}\right)^n$$

Deoarece $1+\frac{\alpha^2}{n(1-\alpha)} \leq \exp\left(\frac{\alpha^2}{n(1-\alpha)}\right)$, rezultă $\frac{1}{\rho} \leq \exp\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)$ şi deci,

$$\ln\frac{1}{\rho} \leq \frac{\alpha^2}{1-\alpha}.$$

■

Teorema 3.21 *Fie vectorul* $b = T_a^{-1}(b')$, *obţinut prin intermediul funcţiei* Φ. *Dacă există* $w \in \Pi$ *astfel încât* $c^\top \cdot w = 0$, *atunci ori* $c^\top \cdot b = 0$, *ori* $f(b) \leq f(a) - \delta$.

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că dacă $c^\top \cdot w = 0$, atunci $c_p \neq \mathbf{0}$.

Vom presupune prin absurd că $c_p = \mathbf{0}$. Deoarece $c^\top \cdot w = 0$, rezultă că $c'^\top \cdot w' = 0$, unde $w' = T_a(w)$. Deoarece $c_p = \mathbf{0}$, c' este în spaţiul generat de liniile lui B şi este ortogonal pe orice vector din spaţiul nul al lui B, în particular pe $w' - a_0$. Astfel, $c'^{\top} \cdot w' = c'^{\top} \cdot a_0$. Dar, $c'^{\top} \cdot a_0 > 0$, pentru că altfel, $c^{\top} \cdot a = 0$, şi algoritmul s-ar fi oprit înainte de a-l determina pe b. Prin urmare, $c'^{\top} \cdot w' = c'^{\top} \cdot a_0 > 0$, şi am obţinut o contradicţie.

Astfel, $c_p \neq 0$ şi $\|\hat{c}_p\| = 1$.

Fie $b' = a_0 - \frac{\alpha}{n}\hat{c}_p$, vectorul calculat la punctul 3 din descrierea lui Φ. Dacă $c'^{\top} \cdot b' = 0$ atunci $c^{\top} \cdot b = 0$. În caz contrar, avem:

$$\begin{aligned} f'(b') - f'(a_0) &= \ln \frac{(c'^{\top} \cdot b')^n}{b'_1 \ldots b'_n} - \ln \left(\frac{c'^{\top} \cdot a_0}{\frac{1}{n}} \right)^n = \\ &= \ln \left(\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0} \right)^n - \ln \frac{b'_1 \ldots b'_n}{(\frac{1}{n})^n} \end{aligned}$$

În baza Propoziţiei 3.19 şi a faptului că $R < 1$, avem

$$\ln \left(\frac{c'^{\top} \cdot b'}{c'^{\top} \cdot a_0} \right) \leq -\frac{\alpha}{R} < -\alpha.$$

Condiţiile Propoziţiei 3.20 fiind îndeplinite, avem:

$$-\ln \frac{b'_1 \ldots b'_n}{(\frac{1}{n})^n} \leq \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

şi prin urmare,

$$f'(b') - f'(a_0) = \ln \frac{(c'^{T} b')^n}{b'_1 \ldots b'_n} - \ln \frac{b'_1 \ldots b'_n}{(\frac{1}{n})^n} \leq -\alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = -\delta.$$

Deoarece în baza Lemei 3.15 avem: $f(b) - f(a) = f'(b') - f'(a')$, rezultă:

$$f(b) \leq f(a) - \delta$$

şi astfel, teorema este demonstrată. ■

Observaţia 3.5 *Complexitatea calculelor din cadrul algoritmului lui Karmarkar este următoarea: fiecare iteraţie necesită un număr de ordinul $O(n^3)$ operaţii aritmetice pentru eliminările Gaussiene, iar numărul iteraţiilor este de $O(nL)$. Prin urmare, numărul total de operaţii aritmetice este de ordinul $O(n^4 L)$ şi astfel, algoritmul rezolvă problema într-un timp polinomial.*

Trebuie precizat faptul că cercetările făcute ulterior de diverşi autori (de exemplu [30], [24], [38], [14]) au condus la variante ale algoritmului care au îmbunătăţit ordinul de complexitate.

3.3.7. Conversia la forma standard Karmarkar

Vom arăta în continuare că forma standard Karmarkar este echivalentă cu orice problemă de programare liniară. Pentru aceasta, să considerăm problema liniară în formă standard:

$$\inf\left\{c^\top \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \tag{3.3.4}$$

Rezolvarea acesteia este echivalentă cu găsirea unei soluţii a sistemului liniar de inegalităţi:

$$\begin{cases} A \cdot x & & = b \\ \quad x & & \geq \mathbf{0} \\ & A^\top \cdot u & \leq c \\ c^\top \cdot x & - b^\top \cdot u & = 0 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Dacă înlocuim variabilele arbitrare $u_j = u_j^+ - u_j^-$, unde $u_j^+ \geq 0$, $u_j^- \geq 0$, introducem variabila vectorială ecart $s \geq \mathbf{0}$ şi facem notaţiile:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} A & & & \\ & A^\top & -A^\top & \mathbf{I} \\ c^\top & -b^\top & b^\top & \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \\ y^\top &= \left(x^\top,\ (u^+)^\top,\ (u^-)^\top,\ s^\top \right) \end{aligned}$$

sistemul de inegalităţi (3.3.5) se rescrie astfel:

$$\begin{cases} \bar{A} \cdot y = \bar{b} \\ \quad y \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Vom considera matricea $\bar{A}$ de dimensiune $m \times n$ şi fie L mărimea problemei date de (3.3.6).

Conform Lemei 3.1, componentele oricărei soluţii de bază a sistemului (3.3.6) sunt mărginite în modul de 2^L. Prin urmare, dacă notăm numărul $\mu = n2^L$, putem adăuga la sistemul (3.3.6) şi restricţia:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq \mu,$$

fără ca soluţiile acestuia să fie afectate. Vom introduce aici variabila ecart $y_{n+1} \geq 0$, şi considerăm acum variabila vectorială $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dacă mai extindem şi matricea $\bar{A}$ cu o coloană nulă şi notăm $\bar{A}' = \left(\bar{A}\,\mathbf{0}\right)$, sistemul (3.3.6) devine echivalent cu:

$$\begin{cases} \bar{A}' \cdot y = \bar{b} \\ \mathbf{e}^\top \cdot y = \mu \\ y \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Dacă scalăm variabila y şi notăm $x' = \dfrac{1}{\mu} y$, atunci

$$\begin{cases} \bar{A}' \cdot y = \bar{b} \\ \mathbf{e}^\top \cdot y = \mu \\ y \geq \mathbf{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu\bar{A}' \cdot x' = \bar{b} \\ \mathbf{e}^\top \cdot x' = 1 \\ x' \geq \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Din fiecare ecuaţie i, $1 \leq i \leq m$, a sistemului $\mu\bar{A}' \cdot x' = \bar{b}$, vom scade din ambii membri $\bar{b}_i\left(\mathbf{e}^\top \cdot x'\right) = \bar{b}_i$; obţinem sistemul echivalent: $\left(\mu\bar{A}' - \bar{b}^\top \cdot \mathbf{E}\right) \cdot x' = \mathbf{0}$, unde E este matricea cu toate elementele egale cu 1. Astfel, dacă notăm

$$A' = \left(\mu\bar{A}' - \bar{b}^\top \cdot \mathbf{E}\right),$$

sistemele din (3.3.7) devin echivalente cu:

$$\begin{cases} A' \cdot x' = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^\top \cdot x' = 1 \\ x' \geq \mathbf{0}. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Prin urmare, problema (3.3.4) este echivalentă cu sistemul (3.3.8), care reprezină intersecţia unui spaţiu liniar cu un simplex. Pentru a ajunge la o problemă în forma standard Karmarkar, vom adăuga aici o nouă variabilă $x'_{n+2} \geq 0$, astfel încât vectorul $a_0 = \frac{1}{n+2}\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n+2}$ să fie o soluţie iniţială admisibilă. Obţinem astfel următorul sistem, echivalent cu cel anterior:

$$\begin{cases} A' \cdot x' - (A' \cdot \mathbf{e})\, x'_{n+2} = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}^\top \cdot x' + x'_{n+2} = 1 \\ x' \geq \mathbf{0}, \quad x'_{n+2} \geq 0. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Dacă notăm acum $\hat{A} = A' - (A' \cdot \mathbf{e}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+2)}$ şi considerăm variabila vectorială $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+2}$, problema (3.3.4) este echivalentă cu următoarea problemă în formă standard Karmarkar:

$$\min\left\{\hat{x}_{n+2} \mid \hat{A}\cdot\hat{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{e}^{\top}\cdot\hat{x} = 1,\ \hat{x} \geq \mathbf{0}\right\}.$$

Costul acestei probleme este întotdeauna $\hat{x}_{n+2} \geq 0$ şi este evident faptul că această problemă are optimul 0, dacă şi numai dacă sistemul (3.3.9) este compatibil, adică, dacă problema (3.3.4) are o soluţie optimă finită.

Observaţia 3.6 *Este uşor de văzut că aceste operaţii de transformare a unei probleme de programare liniară într-o problemă standard Karmarkar necesită doar un număr polinomial de operaţii aritmetice, iar mărimea problemei rezultate este la rândul ei mărginită polinomial de mărimea problemei iniţiale. Astfel, pe un calculator virtual ce execută toate operaţiile aritmetice în mod exact, algoritmul proiectiv al lui Karmarkar rezolvă orice problemă de programare liniară într-un timp polinomial.*

Modul de a transforma o problemă de programare liniară în forma standard Karmarkar nu este unic. Există şi alte scheme pentru transformările de acest fel, care pot conduce eventual la probleme de dimensiuni mai mici.

Proprietatea acestui algoritm de a rezolva problemele în timp polinomial se extinde şi la calculatoarele tradiţionale, cu care se lucrează în mod obişnuit, şi care efectuează operaţiile aritmetice în simplă sau dublă precizie.

3.4. Algoritmul afin

De la publicarea algoritmului proiectiv a lui Karmarkar în 1984, s-au intreprins numeroase cercetări în direcţia adaptării metodelor de punct interior, specifice optimizărilor neliniare, la problemele de programare liniară. În prezent, aceste metode se pot împărţi în două clase: cele care folosesc transformări proiective, şi cele care folosesc transformări afine. O caracterizare foarte generală care se poate face acestor două clase de algoritmi este următoarea. Algoritmii proiectivi au o descriere mai greoaie, în schimb, sunt mai uşor de analizat.

Aceasta înseamnă că pentru descrierea lor este necesară utilizarea unor funcţii barieră logaritmince (sau funcţii potenţial), a condiţiei ca funcţia obiectiv să aibe optimul zero, etc., în schimb, cu ajutorul acestui apanaj tehnic, se poate demonstra că algoritmul converge în timp polinomial. Algoritmii afini se pot descrie mai uşor, dar sunt greu de analizat. Cu alte cuvinte, ei au o descriere geometric-intuitivă foarte simplă, dar demonstarea convergenţei lor este o problemă matematică interesantă şi dificilă. Primele demonstraţii de convergenţă cunoscute pentru acest caz sunt cele care presupun ca problemele liniare să fie atât primal, cât şi dual nedegenerate (deşi, din punct de vedere intuitiv, astfel de ipoteze n-ar fi necesare).

Ar fi greşit să se considere că algoritmii proiectivi ar fi mai buni decât cei afini, numai datorită faptului că pentru ei convergenţa poate fi dovedită mai uşor. De fapt, cele mai multe experimentări s-au făcut cu algoritmii afini (a se vedea [1], [23]), din cauză că aceştia au evidente avantaje faţă de algoritmii proiectivi. De exemplu, algoritmii afini se aplică direct problemelor liniare în formă standard şi în afară de aceasta, implementarea lor se poate face mult mai eficient. Ca o ironie a soartei, putem afirma că "ce este teoretic mai bun (în cazurile defavorabile), nu este şi practic mai eficient (în cazurile obişnuite)".

Deşi studiul metodelor de punct interior pentru programarea liniară au luat un avânt abia după anul 1984, prima publicaţie a unui algoritm afin a fost făcută cu mult mai înainte şi aparţine matematicianului sovietic I.I. Dikin [9]. Vom expune în continuare acest algoritm, urmând modul de prezentare din lucrarea lui Vanderbei şi Lagarias [39].

3.4.1. Prezentarea algoritmului

Fiind dată matricea A de dimensiune $m \times n$ şi vectorii $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, considerăm următoarea problemă primală de programare liniară:

$$\min\left\{c^{\top} \cdot x \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\}. \tag{P}$$

Problema duală asociată este

$$\max\left\{b^{\top} \cdot u \mid A^{\top} \cdot u \leq c\right\}. \tag{D}$$

Vom introduce următoarele notaţii. Fie

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\}$$

mulţimea soluţiilor admisibile pentru problema (P);

$$\mathcal{P}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b,\ x > \mathbf{0}\}$$

interiorul relativ al lui $\mathcal{P}$; $\partial\mathcal{P} = \mathcal{P} - \mathcal{P}^0$ frontiera lui $\mathcal{P}$. Fiind dat un vector $x \in \mathbb{R}^n$, vom nota cu $D_x = diag\,(x)$ matricea diagonală.

Descrierea algoritmului se face prin intermediul a trei funcţii. Prima funcţie, $w : \mathcal{P}^0 \to \mathbb{R}^m$, asociază fiecărui $x \in \mathcal{P}^0$ un vector dual:

$$w\,(x) = \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right) \cdot A \cdot D_x^2 \cdot c.$$

Cea de a doua funcţie, $r : \mathcal{P}^0 \to \mathbb{R}^n$, exprimă diferenţa dintre membrii restricţiilor din problema duală:

$$r\,(x) = c - A^\top \cdot w\,(x)\,.$$

Se observă cu uşurinţă că $w\,(x)$ este dual admisibil dacă şi numai dacă $r\,(x) \geq 0$. Cea de a treia funcţie, $y : \mathcal{P}^0 \to \mathcal{P}$, este definită astfel:

$$y\,(x) = x - \frac{D_x^2 \cdot r\,(x)}{\|D_x \cdot r\,(x)\|}. \tag{3.4.1}$$

Algoritmul afin.

Punctele generate sunt definite prin următoarea relaţie de recurenţă:

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} y\left(x^{(k)}\right) & \text{dacă} \quad x^{(k)} \in \mathcal{P}^0 \\ x^{(k)} & \text{dacă} \quad x^{(k)} \in \partial\mathcal{P}. \end{cases}$$

De asemenea, se generează şi vectorii duali:

$$w^{(k)} = \begin{cases} w\left(x^{(k)}\right) & \text{dacă} \quad x^{(k)} \in \mathcal{P}^0 \\ w^{(k-1)} & \text{dacă} \quad x^{(k)} \in \partial\mathcal{P}. \end{cases}$$

precum şi vectorii costurilor reduse:

$$r^{(k)} = c - A^\top \cdot w^{(k)}.$$

Pentru simplificarea scrierii, vom nota $D_k = D_{x^{(k)}}$.

Se observă că, de prima dată când $x^{(k)}$ ajunge pe frontiera domeniului de admisibilitate, şirul care se generează în continuare, rămâne fixat pe acest vector. Prin comparaţie, şirul vectorilor duali ramân fixaţi pe valoarea corespunzătoare ultimului punct din ineriorul domeniului, înainte de a se atinge frontiera $\partial \mathcal{P}$.

Algoritmul descris aici diferă cu puţin de cel prezentat de Barnes în [4] şi de Vanderbei cu Lagarias în [40]. Deosebirea constă în felul în care se alege lungimea pasului. În cazul nostru, lungimea pasului este astfel încât de fiecare dată se ajunge pe suprafaţa elipsoidului înscris (a se vedea [4] pentru definiţia elipsoidului în cauză), în timp ce Barnes, alege lungimea pasului cu o fracţiune α din distanţa până la elipsoid. Astfel, dacă în cazul nostru algoritmul se poate opri după un număr finit de paşi, în varianta lui Barnes are loc o apropiere asimptotică de soluţia optimă. În lucrarea lui Vanderbei şi Lagarias, lungimea pasului este şi ea luată cu o anumită fracţiune din distanţa până la cea mai apropiată faţă a domeniului de admisibilitate. Acest lucru ar însemna, ca în cazul nostru să schimbăm definiţia funcţiei $y(x)$ dată de (3.4.1), astfel:

$$y(x) = x - \frac{\alpha D_x^2 \cdot r(x)}{\gamma(x)}$$

unde $\alpha \in (0,1)$ şi $\gamma(x) = \max\limits_j \{x_j r_j(x)\}$. Se poate vedea cu uşurinţă că

$$\gamma(x) \leq \|D_x \cdot r(x)\|_\infty \leq \|D_x \cdot r(x)\|$$

(ipoteza 1. de mai jos implică $\gamma(x) > 0$). Deci, lungimea pasului aleasă de Vanderbei şi Lagarias este cea mai mare, urmată de cea care foloseşte norma L^∞, şi în cele din urmă, de cea în normă L^2 pe care o vom folosi în prezentarea noastră. Majoritatea implementărilor folosesc lungimea cea mai mare a pasului, dar demonstraţiile pe care le vom da aici pot fi uşor adaptate la cazul normei L^∞, împreună cu introducerea factorului de contracţie $\alpha < 1$.

3.4.2. Teorema de convergenţă

Vom face următorele ipoteze:

Ipoteza 1. $-\infty < \min\limits_{\mathcal{P}} \left\{c^{\top} \cdot x\right\} < \max\limits_{\mathcal{P}} \left\{c^{\top} \cdot x\right\}.$

Ipoteza 2. $\mathcal{P}^0$ este nevidă; $x^{(0)} \in \mathcal{P}^0$ este dat.

Ipoteza 3. Matricea A are liniile liniar independente.

Ipoteza 4. Matricea $A \cdot D_x^2 \cdot A^{\top}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathcal{P}$. (Această condiţie se mai numeşte şi *nedegenerare primală.*)

Se observă cu uşurinţă că ipoteza 3 implică inversabilitatea lui $A \cdot D_x^2 \cdot A^{\top}$ pentru orice $x \in \mathcal{P}^0$, ceea ce înseamnă că ipoteza 4 este de fapt o condiţie pentru nedegenerarea primală pe frontiera lui $\mathcal{P}$. În plus, nedegenerarea primală implică faptul că domeniul de definiţie a funcţiei w poate fi extins pe întregul domeniu $\mathcal{P}$. De asemenea, ipoteza 1 implică $\|D_x \cdot r\left(x\right)\| \neq 0$ pentru orice $x \in \mathcal{P}^0$, şi prin urmare, funcţia $y\left(x\right)$ este bine definită.

Teorema 3.22 *Punctele $x^{(k)}$ generate de algoritm converg către un punct primal admisibil $\bar{x} \in \mathcal{P}$, iar şirul $w^{(k)}$ converge către un punct dual admisibil $\bar{w}$. În plus, punctul primal admisibil $\bar{x}$ şi costul redus $\bar{r} = c - A^{\top} \cdot \bar{w}$ satisfac condiţiile ecarturilor complementare:*

$$\bar{x}_j = 0 \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad \bar{r}_j > 0. \tag{3.4.2}$$

Demonstraţie. Vom considera separat cazurile în care $\mathcal{P}$ este mărginită sau nemărginită şi vom structura demonstaţia în mai mulţi paşi în care demonstrăm anumite afirmaţii.

Cazul 1: mulţimea $\mathcal{P}$ este mărginită.

Pasul 1. Admisibilitatea primală este conservată. Într-adevăr, se verifică cu uşurinţă că $A \cdot D_x^2 \cdot r\left(x\right) = 0$, şi prin urmare, deoarece $A \cdot x = b$, avem:

$$A \cdot y\left(x\right) = A \cdot x - \frac{A \cdot D_x^2 \cdot r\left(x\right)}{\|D_x \cdot r\left(x\right)\|} = b.$$

Din definiţia lui $y\left(x\right)$ dată de (3.4.1), componenta j se scrie:

$$y_j\left(x\right) = x_j \left(1 - \frac{x_j r_j\left(x\right)}{\|D_x \cdot r\left(x\right)\|}\right) \tag{3.4.3}$$

şi deoarece evident $-1 \leq \dfrac{x_j r_j(x)}{\|D_x \cdot r(x)\|} \leq 1$, avem:

$$0 \leq y_j(x) \leq 2x_j \tag{3.4.4}$$

Pasul 2. Dacă se atinge frontiera, avem optimalitate. Să presupunem că $x^{(k)} \in \mathcal{P}^0$ şi că $x_j^{(k+1)} = 0$. Atunci, din (3.4.3) avem $x_j^{(k)} r_j^{(k)}(x) = \left\|D_k \cdot r^{(k)}\right\|$. Din faptul că $x_i^{(k)} > 0$ pentru toţi i, deducem că $r_j^{(k)} > 0$ şi $r_i^{(k)} = 0$ pentru toţi $i \neq j$. Deoarece $\bar{x} = x^{(k+1)}$ şi $\bar{w} = w^{(k)}$, rezultă că (3.4.2) este adevărată. Prin urmare, vom presupune că $x^{(k)} \in \mathcal{P}^0$ pentru orice k.

Pasul 3. Valoarea funcţiei obiectiv descreşte. Avem:

$$c^\top \cdot x - c^\top \cdot y(x) = \frac{c^\top \cdot D_x^2 \cdot r(x)}{\|D_x \cdot r(x)\|}$$

Pe de altă parte, $D_x \cdot r(x) = P_x \cdot D_x \cdot c$, unde prin $P_x = \mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_x$ am notat operatorul de proiecţie pe spaţiul nul al lui $A \cdot D_x$. Deci,

$$c^\top \cdot x - c^\top \cdot y(x) = \frac{c^\top \cdot D_x \cdot P_x \cdot D_x \cdot c}{\|D_x \cdot r(x)\|}$$

şi deoarece P_x este matricea de proiecţie, ea este idempotentă şi simetrică, astfel încât

$$c^\top \cdot x - c^\top \cdot y(x) = \|P_x \cdot D_x \cdot c\| = \|D_x \cdot r(x)\|$$

Rezultă deci,

$$c^\top \cdot x^{(k)} - c^\top \cdot x^{(k+1)} = \left\|D_k \cdot r^k\right\| \geq 0.$$

Pasul 4. Condiţia ecarturilor complementare se păstrează la limită. În baza ipotezei 1 şi a pasului anterior, şirul $c^\top \cdot x^{(k)}$ este mărginit inferior şi descrescător, deci convergent. Astfel, din ultima ralaţie rezultă că

$$\lim_{k \to \infty} \left\|D_k \cdot r^k\right\| = 0.$$

Pasul 5. Variabilele duale sunt mărginite. Din ipoteza 4 rezultă că $w(x)$ este o funcţie continuă pe mulţimea compactă $\mathcal{P}$; deci $w(x)$ este mărginită.

În cele ce urmează, vom adopta următoarele notaţii. Fie $\bar{w}$ un punct de acumulare a şirului $w^{(k)}$, şi $w^{(k_p)}$ un subşir convergent la $\bar{w}$, deci $\lim\limits_{p\to\infty} w^{(k_p)} = \bar{w}$. Vom nota cu $\bar{r} = c - A^\top \cdot \bar{w}$. Definim următoarele mulţimi de indici:

$$\mathcal{B} = \{j \mid \bar{r}_j = 0\}, \quad \mathcal{R} = \{j \mid \bar{r}_j \neq 0\}.$$

Evident, $\mathcal{B}$ este constituită din mulţimea indicilor de bază iar $\mathcal{R}$ din cea a indicilor nebazici. În concordanţă cu aceste mulţimi, coloanele matricei A se pot partiţiona în două submatrici: $A = \begin{pmatrix} B \vdots R \end{pmatrix}$, iar componentele vectorului $x \in \mathbb{R}^n$ în $x = \begin{pmatrix} x_\mathcal{B} \\ x_\mathcal{R} \end{pmatrix}$, unde, $x_\mathcal{B}$ reprezintă componentele de bază, iar $x_\mathcal{R}$ cele nebazice.

Pasul 6. Avem $\lim\limits_{x_\mathcal{R}\to \mathbf{0}} r(x) = \bar{r}$. Din definiţia lui $r(x)$ rezultă:

$$\begin{aligned} r(x) &= \left[\mathbf{I} - A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_x^2\right] \cdot c = \\ &= \left[\mathbf{I} - A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_x^2\right] \cdot \bar{r} \end{aligned}$$

unde cea de a doua egalitate rezultă din definiţia lui $\bar{r}$ şi din faptul că matricea din parantezele drepte anulează pe $A^\top$. Ţinând seama de faptul că componentele de bază a lui $\bar{r}$ sunt zero, din ultima ecuaţie obţinem:

$$\bar{r} - r(x) = A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot R \cdot D_{x_\mathcal{R}}^2 \cdot \bar{r}_\mathcal{R}$$

Deoarece matricea $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ există şi este continuă pe tot domeniul compact $\mathcal{P}$, rezultă că ea este mărginită. Prin urmare, dacă $x_\mathcal{R} \to \mathbf{0}$, matricea diagonală $D_{x_\mathcal{R}}^2$ devine nulă şi din ultima relaţie rezultă că afirmaţia este adevărată.

Pasul 7. Componentele nebazice ale lui x converg la zero. Fie $j \in \mathcal{R}$ fixat. Din pasul 4 rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} r_j^{(k)} = 0$. În baza notaţiilor făcute mai sus, $\lim\limits_{p\to\infty} r_j^{(k_p)} = \bar{r}_j$, care este un număr diferit de zero. Deci, pentru subşirul $x_j^{(k_p)}$ avem: $\lim\limits_{p\to\infty} x_j^{(k_p)} = 0$, pentru orice $j \in \mathcal{R}$, adică,

$$\lim_{p\to\infty} x_{\mathcal{R}}^{(k_p)} = \mathbf{0}.$$

Să presupunem acum, prin absurd, că şirul $x_{\mathcal{R}}^{(k)}$ nu converge la zero în raport cu toate elementele sale, adică, există un $\delta > 0$ astfel încât $x_{\mathcal{R}}^{(k)} \in \overline{C}_\delta$ pentru un număr infinit de valori ale lui k, unde $\overline{C}_\delta$ este complementara mulţimii

$$C_\delta = \{x_{\mathcal{R}} \mid 0 \le x_i < \delta, \text{ pentru orice } i \in \mathcal{R}\}.$$

Evident, pentru orice altă valoare mai mică decât δ, această proprietate se păstrează. Fie deci δ suficient de mic, astfel încât $\overline{C}_\delta$ să conţină o infinitate de elemente a şirului şi

$$\left\| r_j^{(k'_p)} \right\| \ge \frac{1}{2} \|\bar{r}_j\| \tag{3.4.5}$$

pentru toţi indicii j şi toate punctele x pentru care $x_{\mathcal{R}} \in C_\delta$. Acest lucru este posibil datorită afirmaţiei din pasul 6. În ipotezele presupuse de noi aici, mulţimea de indici

$$\mathcal{K} = \left\{ k \mid x_{\mathcal{R}}^{(k)} \in C_\delta \text{ şi } x_{\mathcal{R}}^{(k+1)} \in \overline{C}_\delta \right\}$$

este infinită. Dacă notăm $\mathcal{K}_j = \left\{ k \in \mathcal{K} \mid x_j^{(k+1)} \ge \delta \right\}$, atunci $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{j\in\mathcal{R}} \mathcal{K}_j$. Deoarece $\mathcal{R}$ este finită, există un indice j pentru care $\mathcal{K}_j$ este infinită. Pentru orice $k'_p \in \mathcal{K}_j$ avem

$$x_{\mathcal{R}}^{(k'_p)} < \delta \quad \text{şi} \quad x_j^{(k'_p+1)} \ge \delta.$$

Folosind formula (3.4.4), cea de a doua afirmaţie de mai sus implică $x_j^{(k'_p)} \ge \dfrac{\delta}{2}$. Din (3.4.5) observăm că pentru orice p, avem

$$\left\| x_j^{(k'_p)} r_j^{(k'_p)} \right\| \ge \frac{1}{4}\delta \|\bar{r}_j\| > 0.$$

Dar această relaţie contrazice afirmaţia din pasul 4 şi astfel ajungem la concluzia că $x_{\mathcal{R}}^{(k)}$ converge la zero.

Pasul 8. Variabilele duale converg la $\bar{w}$. Similar ca la pasul 6, efectuăm mai întâi următoarele calcule:

$$\begin{aligned} w^k - \bar{w} &= \left(A \cdot D_k^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_k^2 \cdot \left(c - A^\top \cdot \bar{w}\right) = \\ &= \left(A \cdot D_k^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_k^2 \cdot \bar{r} = \\ &= \left(A \cdot D_k^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot R \cdot D^2_{x_{\mathcal{R}}^{(k)}} \cdot \bar{r}_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Deoarece $\left(A \cdot D_k^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ este mărginită şi $x_{\mathcal{R}}^{(k)}$ converge la zero, rezultă că diferenţa de mai sus converge la zero.

Pasul 9. Pentru orice $j \in \mathcal{R}$, avem $\bar{r}_j \geq 0$. Presupunem prin absurd că există $j \in \mathcal{R}$ astfel încât $\bar{r}_j < 0$. Deoarece $w^k \to \bar{w}$, există un K astfel încât $r_j^{(k)} < 0$ pentru toţi $k \geq K$. De aici, se observă că

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \left(1 - \frac{x_j^{(k)} r_j^{(k)}}{\|D_k \cdot r^{(k)}\|}\right) > x_j^{(k)} \quad \text{pentru orice } k \geq K.$$

ceea ce contrazice afirmaţia din pasul 7.

Pasul 10. Şirul componentelor de bază $x_{\mathcal{B}}^{(k)}$ este convergent (către $\bar{x}_{\mathcal{B}}$). Din felul în care algoritmul construieşte punctele $x^{(k)}$, avem

$$x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} = -\frac{\left(x_j^{(k)}\right)^2 r_j^{(k)}}{\|D_k \cdot r^{(k)}\|} \tag{3.4.6}$$

Prin urmare, $x_j^{(k)}$ este convergent dacă

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_j^{(k)}\right)^2 \left|r_j^{(k)}\right|}{\|D_k \cdot r^{(k)}\|} < \infty.$$

Pentru $j \in \mathcal{B}$, avem

$$r_j(x) = r_j(x) - \bar{r}_j = \left(\mathbf{e}^j\right)^\top \cdot A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot R \cdot D^2_{x_{\mathcal{R}}} \cdot \bar{r}_{\mathcal{R}}$$

Deci,

$$x_j^2 r_j = \sum_{l \in \mathcal{R}} \sigma_{jl}(x)\, x_l^2 \bar{r}_l$$

unde

$$\sigma_{jl}(x) = \left(\mathbf{e}^j\right)^\top \cdot D_x^2 \cdot A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot R \cdot \mathbf{e}^l$$

Continuitatea funcţiei $\sigma_{jl}(x)$ şi mărginirea domeniului $\mathcal{P}$ implică existenţa constantelor de mărginire $\bar{\sigma}_{jl}$ astfel încât $|\sigma_{jl}(x)| \leq \bar{\sigma}_{jl}$ pentru orice $x \in \mathcal{P}$. Prin urmare,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_j^{(k)}\right)^2 \left|r_j^{(k)}\right|}{\left\|D_k \cdot r^{(k)}\right\|} \leq \sum_{l \in \mathcal{R}} \bar{\sigma}_{jl} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_l^{(k)}\right)^2 \bar{r}_l}{\left\|D_k \cdot r^{(k)}\right\|} \tag{3.4.7}$$

Afirmaţia din pasul 7 şi ecuaţia (3.4.6) implică că, pentru orice $l \in \mathcal{R}$, seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x_l^{(k)}\right)^2 \bar{r}_l}{\left\|D_k \cdot r^{(k)}\right\|}$$

este convergentă. Deoarece $r_l^{(k)} \to \bar{r}_l$, rezultă că membrul drept din (3.4.7) este finit.

Pasul 11. Condiţia ecarturilor complementare este îndeplinită. Este suficient să arătăm că $\bar{x}_{\mathcal{B}} > \mathbf{0}$. Fie $j \in \mathcal{B}$ fixat. Pentru a arăta că $\bar{x}_j > 0$, este suficient ca seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log\left(x_j^{(k+1)}\right)}{x_j^{(k)}}$$

să fie absolut convergentă, ceea ce are loc, dacă şi numai dacă seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k)}}$$

este absolut convergentă. Din relaţia (3.4.3), obţinem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_j^{(k)} r_j^{(k)}}{\left\|D_k \cdot r^{(k)}\right\|}.$$

Pentru a arăta că seria din membrul drept este absolut convergentă, vom folosi acelaşi argument ca în pasul precedent, cu excepţia faptului că σ_{jl} se va înlocui cu o funcţie similară:

$$\rho_{jl}(x) = \left(\mathbf{e}^j\right)^\top \cdot D_x \cdot A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot R \cdot \mathbf{e}^l$$

Spre deosebire de situaţia din pasul precedent, unde funcţia $\sigma_{jl}(x)$ era mărginită pe tot domeniul $\mathcal{P}$, în cazul de faţă este suficient ca

$\rho_{jl}(x)$ să fie mărginită doar pentru elementele şirului $x^{(k)}$. Acest lucru rezultă din faptul că $x^{(k)}$ este convergent şi $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ este mărginită.

Cu aceasta, teorema este demonstrată pentru cazul când domeniul $\mathcal{P}$ este mărginit.

Cazul 2: mulţimea $\mathcal{P}$ este nemărginită.

Ipoteza de mărginire a domeniului de admisibilitate $\mathcal{P}$, împreună cu condiţia de nedegenerare primală, a fost utilizată în următoarele situaţii:

1. La pasul 5, pentru a se arăta că funcţia variabilelor duale $w(x)$ este mărginită.
2. La pasul 6, 8 şi 11, pentru a se arăta că $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ este mărginită.
3. La pasul 10, pentru a se arăta că funcţia $\sigma_{jl}(x)$ este mărginită.

Vom arăta în continuare că ipoteza de mărginire nu este necesară pentru nici una din situaţiile de mai sus, adică, $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ este mărginită, chiar dacă mulţimea $\mathcal{P}$ este nemărginită. Dacă notăm cu $\widehat{\mathcal{P}}$ mulţimea compactă formată din acoperirea convexă a punctelor extreme ale lui $\mathcal{P}$, atunci, orice puct $x \in \mathcal{P}$ se poate scrie sub forma $x = \hat{x} + \hat{t}$, unde $\hat{x} \in \widehat{\mathcal{P}}$ şi $\hat{t} \geq \mathbf{0}$, $A \cdot \hat{t} = 0$. Se verifică cu uşurinţă că $A \cdot D_x^2 \cdot A^\top - A \cdot D_{\hat{x}}^2 \cdot A^\top$ este semipozitiv definită, de unde rezultă că $\lambda_1(x) \geq \lambda_1(\hat{x})$, unde $\lambda_1(x)$ reprezintă cea mai mică valoare proprie a lui $A \cdot D_x^2 \cdot A^\top$. Din condiţia de nedegenerare primală şi din faptul că $\widehat{\mathcal{P}}$ este compactă, rezultă că $\lambda_1(\hat{x}) \geq \bar{\lambda}_1 > 0$ pentru orice $\hat{x} \in \widehat{\mathcal{P}}$. Deoarece norma din L^2 a lui $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$ este chiar $\dfrac{1}{\lambda_1(x)}$, avem

$$\left\|\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{\lambda_1(x)} \leq \frac{1}{\lambda_1(\hat{x})} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_1} < \infty.$$

Trebuie subliniat faptul că condiţia de nedegenerare primală este esenţială pentru mărginirea lui $\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1}$, aşa cum se poate vedea din următorul exemplu:

$$\min\left\{x_1 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\right\}.$$

Evident, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ este un punct admisibil pentru care

$\left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ devine nemărginită.

Vom arăta acum că, condiţia de nedegenerare primală poate să lipsească din prima şi a treia situaţie descrisă mai sus. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că, pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^n$, funcţia

$$w^v(x) = \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_x^2 \cdot v$$

este mărginită.

Introducem următoarele convenţii de scriere:

- Dacă A_i este linia i din matricea A, atunci vom nota cu $A_i(v)$ matricea care se obţine din A prin încocuirea liniei A_i cu vectorul v.
- $\det\limits_{j_1,\ldots,j_m}(A)$ este determinantul matricei pătratice $m \times m$, care este formată din coloanele $A^{j_1}, \ldots, A^{j_m}$ ale matricei A.

Pentru a scrie componenta $w_i^v(x)$. se foloseşte regula lui Cramer şi teorema lui Cauchy-Binet:

$$w_i^v(x) = \frac{\sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \left(x_{j_1} \cdots x_{j_m}\right)^2 \det\limits_{j_1,\ldots,j_m}(A) \det\limits_{j_1,\ldots,j_m}(A_i(v))}{\sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \left(x_{j_1} \cdots x_{j_m}\right)^2 \left[\det\limits_{j_1,\ldots,j_m}(A)\right]^2} \tag{3.4.8}$$

Pentru a majora această expresie, vom folosi inegalitatea

$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{N} r_i\right|}{\sum\limits_{i=1}^{N} s_i} \le \max_{1 \le i \le N} \frac{|r_i|}{s_i}$$

care este adevărată pentru orice şir de perechi de valori reale (r_i, s_i), $1 \le i \le N$, pentru care $s_i > 0$ Deoarece anumiţi termeni din suma de la numărătorul relaţiei (3.4.8) se pot anula, concomitent cu cei corespunzători din suma de la numitor, putem folosi inegalitatea de mai sus pentru a obţine următoarea majorare:

$$|w_i^v(x)| \leq \max_{\substack{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n \\ \det_{j_1,\ldots,j_m}(A)\neq 0}} \left| \frac{\det_{j_1,\ldots,j_m}(A_i(v))}{\det_{j_1,\ldots,j_m}(A)} \right| .$$

Membrul drept al acestei inegalităţi este independent de x şi astfel, reprezintă o margine superioară. ∎

3.5. Traiectorii continue

Să considerăm din nou problema de programare liniară:

$$\min\left\{c^\top \cdot x \;\middle|\; A \cdot x = b,\ x \geq \mathbf{0}\right\} \tag{3.5.1}$$

în care liniile matricei A sunt liniar independente şi presupunem că există un vector w, având toate componentele pozitive şi pentru care $A \cdot w = b$.

Algoritmii de tip Karmarkar folosesc un proces iterativ care constă în determinarea unui şir de puncte din interiorul domeniului de admisibilitate, puncte ce se obţin prin deplasarea cu un pas anume de-a lungul unor direcţii, calculate la fiecare iteraţie. Dacă lungimea pasului devine infinitesimală şi transformările pentru determinarea direcţiilor noi se recalculează de fiecare dată, obţinem varianta "*continuă*" a algoritmilor respectivi. Varianta discretă a algoritmilor se poate prezenta astfel:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha v^{(k)} + O\left(\alpha^2\right).$$

unde, la iteraţia k, notăm cu $v^{(k)}$ direcţia de deplasare iar cu α, lungimea pasului. Luând pe $\alpha \to 0$, obţinem varianta infinitesimală a procesului de determinare a punctelor, pentru care traiectoria lor continuă este dată de ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = v$$

unde v, ca funcţie de x, defineşte un câmp vectorial.

Pentru algoritmul proiectiv, ecuaţia diferenţială este:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\left[D_x - x \cdot x^\top\right] \cdot P_{A \cdot D_x} \cdot D_x \cdot c$$

unde $D_x = diag\,(x)$ şi

$$P_{A \cdot D_x} = \mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot \left(A \cdot D_x^2 \cdot A^\top\right)^{-1} \cdot A \cdot D_x$$

iar pentru algoritmul afin, ecuaţia diferenţială este:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -D_x \cdot P_{A \cdot D_x} \cdot D_x \cdot c \tag{3.5.2}$$

Numeroşi autori (vezi spre exemplu [5], [6], [22], [35]) au studiat aceste traiectorii din diverse perspective, punându-se în evidenţă unele caracteristici foarte interesante ale acestora.

În continuare vom prezenta unele proprietăţi care decurg direct din studiul ecuaţiilor diferenţiale prezentate mai sus. Pentru a fixa ideile, ne vom concentra doar asupra ecuaţiei (3.5.2). De asemenea, pentru a simplifica expunerea, vom nota

$$\gamma\,(x) = P_{A \cdot D_x} \cdot D_x \cdot c$$

iar sistemul de ecuaţii diferenţiale devine

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -D_x \cdot \gamma\,(x)$$

Propoziţia 3.23 *Dacă coordonatele condiţiei iniţiale $x\,(0)$ sunt strict pozitive, atunci, pentru orice $t \geq 0$, avem $x\,(t) > 0$.*

Demonstraţie. Sistemul se poate rescrie pe componente în forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i = -\,x_i\gamma_i(x)$; astfel, pentru orice soluţie avem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i(t) + x_i(t)\gamma_i(x(t)) = 0$$

$$\exp\left(\int_0^t \gamma_i\,(x(s))\,\mathrm{d}s\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_i(t) + x_i(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(\int_0^t \gamma_i\,(x(s))\,\mathrm{d}s\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_i(t)\exp\left(\int_0^t \gamma_i\left(x(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right] = 0$$

de unde obţinem:

$$x_i(t)\exp\left(\int_0^t \gamma_i\left(x(s)\right)\mathrm{d}s\right) = x_i\left(0\right)$$

$$x_i(t) = x_i\left(0\right)\exp\left(-\int_0^t \gamma_i\left(x(s)\right)\mathrm{d}s\right)$$

şi deci, pentru $x_i(0) > 0$ rezultă $x_i(t) > 0$ pentru orice t. ■

Propoziţia 3.24 *Funcţia $t \longmapsto A \cdot x\left(t\right)$ este constantă pentru orice soluţie x a sistemului (3.5.2).*

Demonstraţie. Vom nota

$$F(x) = -D_x \cdot \left[\mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot (A \cdot D_x^2 \cdot A^\top)^{-1} \cdot A \cdot D_x\right] \cdot D_x \cdot c \quad (3.5.3)$$

şi observăm că:

$$\begin{aligned} A \cdot F(x) &= -A \cdot D_x \cdot \left[\mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot (A \cdot D_x^2 \cdot A^\top)^{-1} \cdot A \cdot D_x\right] \cdot D_x \cdot c \\ &= -\left[A \cdot D_x - A \cdot D_x^2 \cdot A^\top \cdot (A \cdot D_x^2 \cdot A^\top)^{-1} \cdot A \cdot D_x\right] \cdot D_x \cdot c = 0 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

De aici rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A \cdot x(t) = A \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A \cdot F(x(t)) = 0$$

şi deci functia $t \longmapsto A \cdot x(t)$ este constantă. ■

Din Propoziţiile 3.23 şi 3.24 rezultă că, dacă $x\left(0\right)$ are componentele $x_i\left(0\right) > 0$ pentru orice i şi $A \cdot x\left(0\right) = b$, atunci, pentru orice t pentru care soluţia $x\left(t\right)$ este definită, avem $A \cdot x\left(t\right) = b$ şi $x_i\left(t\right) > 0$ pentru orice i.

Cu alte cuvinte, dacă dispunem de o soluţie admisibilă $x\left(0\right) > \mathbf{0}$ a problemei (3.5.1), atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.5.2) ne oferă o soluţie admisibilă $x\left(t\right) > \mathbf{0}$ pentru orice t.

Propoziţia 3.25 *Pentru orice soluţie* $x(t) > \mathbf{0}$ *a sistemului (3.5.2) avem:* $\dfrac{d}{dt}c^\top \cdot x(t) \leq 0$.

Demonstraţie. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c^\top \cdot x(t) = c^\top \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \\ &= -c^\top \cdot D_x \cdot \left[\mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot (A \cdot D_x^2 \cdot A^\top)^{-1} \cdot A \cdot D_x\right] \cdot D_x \cdot c \leq 0\end{aligned}$$

deoarece, în condiţiile noastre, matricea $\mathbf{I} - D_x \cdot A^\top \cdot (A \cdot D_x^2 \cdot A^\top)^{-1} \cdot A \cdot D_x$ este semipozitiv definită. Pentru a demonstra această afirmaţie, să notăm matricea $B = A \cdot D_x$.

Orice matrice simetrică M are valori proprii reale [17].

Norma matriceală se poate defini astfel:

$$|\, M \,| = \sup_{\|x\|=1} \|M \cdot x\|\,.$$

De aici rezultă că, dacă $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ sunt valorile proprii ale lui M, atunci,

$$|\, M \,| = \max_{1 \leq i \leq p} \{\, |\lambda_i| \,\}$$

Să considerăm acum matricea simetrică

$$M = B^\top \cdot \left(B \cdot B^\top\right)^{-1} \cdot B.$$

Trebuie să arătăm că, pentru orice vector v, avem:

$$v^\top \cdot (\mathbf{I} - M) \cdot v = v^\top \cdot v - v^\top \cdot M \cdot v \geq 0,$$

adică, $v^\top \cdot M \cdot v \leq \|v\|^2$. Deoarece $v^\top \cdot M \cdot v \leq |\, M \,|\ \|v\|^2$, este suficient să arătăm că

$$|\, M \,| \leq 1. \tag{3.5.5}$$

Fie λ o valoare proprie a lui M şi $x_\lambda \neq \mathbf{0}$ vectorul propriu corespunzător. Avem: $M \cdot x_\lambda = \lambda x_\lambda$, adică,

$$B^\top \cdot \left(B \cdot B^\top\right)^{-1} \cdot B \cdot x_\lambda = \lambda x_\lambda \tag{3.5.6}$$

Dacă $B \cdot x_\lambda = \mathbf{0}$, rezultă că $\lambda x_\lambda = \mathbf{0}$ şi deci, $\lambda = 0$.

Dacă $B \cdot x_\lambda \neq \mathbf{0}$, înmulţind (3.5.6) la stânga cu B, obţinem:

$$B \cdot x_\lambda = \lambda B \cdot x_\lambda.$$

de unde rezultă $\lambda = 1$. Prin urmare, valorile proprii ale lui M pot lua doar valorile 0 sau 1 şi astfel, relaţia (3.5.5) este adevărată. ■

Observaţia 3.7 *Ca fapt divers putem preciza că matricea M, definită mai sus, este idempotentă:*

$$M^2 = B^\top \cdot \left(B \cdot B^\top\right)^{-1} \cdot B \cdot B^\top \cdot \left(B \cdot B^\top\right)^{-1} \cdot B = M$$

şi este la rândul ei semipozitiv definită:

$$v^\top \cdot M \cdot v = v^\top \cdot M^2 \cdot v = (M \cdot v)^\top \cdot (M \cdot v) \geq 0.$$

Din Propoziţia 3.25 rezultă că, de-a lungul soluţiilor sistemului diferenţial, costul problemei (3.5.1) este descrescător pentru $t \geq 0$.

În baza consideraţiilor făcute mai sus, putem formula următoarea procedură iterativă pentru rezolvarea problemelor de programare liniară:

1. Presupunem cunoscut vectorul w, cu componentele $w_i > 0$ pentru orice i şi care satisface $A \cdot w = b$.
2. Luăm $x^{(0)} = w$ şi definim prin recurenţă şirul $x^{(k)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_k F(x^{(k)})$$

unde F este definit de relaţia (3.5.3).

Pe componente, relaţia de recurenţă devine:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \tau_k x_i^{(k)} \gamma_i(x^{(k)}) \,,$$

adică:

$$x_i^{(k+1)} = \left[1 - \tau_k \gamma_i(x^{(k)})\right] x_i^{(k)}.$$

De aici este evident că, dacă luăm $\tau_k < \frac{1}{\gamma_i(x^{(k)})}$, atunci $x_i^{(k)} > 0$ implică $x_i^{(k+1)} > 0$.

În plus, din (3.5.4) avem

$$A \cdot x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)} - \tau_k A \cdot F(x^{(k)}) = A \cdot x^{(k)}$$

deci, $A \cdot x^{(k)} = b$ implică $A \cdot x^{(k+1)} = b$, ceea ce înseamnă că, dacă se porneşte cu un punct admisibil, procesul iterativ construieşte puncte admisibile.

De asemenea, din Propoziţia 3.25 rezultă $c^\top \cdot x^{(k+1)} \leq c^\top \cdot x^{(k)}$ şi prin urmare, la fiecare iteraţie valoarea funcţiei obiectiv se îmbunătăţeşte.

Recunoaştem aşadar cu uşurinţă că aceste idei stau la baza algoritmilor lui Karmarkar prezentaţi în paragrafele anterioare. Denumirea lor de a fi algoritmi "de punct interior" este foarte bine pusă în evidenţă de concluziile care decurg din propoziţiile prezentate mai sus, adică, prin acest procedeu se construieşte un şir minimizant de puncte din interiorul domeniului de admisibilitate.

Bibliografie

[1] I. Adler, N.K. Karmarkar, M.G. Resende, *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming*, Math. Programming **44** (1989), 297-335.

[2] N. Andrei, *Programare matematică: metode de punct interior*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1999.

[3] B. Aspvall, R.E. Stone, *Khachiyan's linear programming algorithm*, Journal of Algorithms **1** (1980), 1-13.

[4] E.R. Barnes, *A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems*, Math. Programming **36** (1986), 174-182.

[5] D.A. Bayer, J.C. Lagarias, *The nonlinear geometry of linear programming. I, Affine and projective scaling trajectories*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 499-526.

[6] D.A. Bayer, J.C. Lagarias, *The nonlinear geometry of linear programming. II, Legendre transform coordinates and central trajectories*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 527-581.

[7] G.B. Dantzig, *Linerar programming and extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[8] G.B. Dantzig, P. Wolfe, *The decomposition algorithm for linear programming*, Econometrica, **9**(4) (1961).

[9] I.I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programmnig*, Soviet Math. Dokl. **8** (1967), 674-675.

[10] S.I. Gass, *Linear programming, methods and applications*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1964.

[11] P. Gács, L. Lovász, *Khachiyan's algorithm for linear programming*, Mathematical Programming Study, **14** (1981), 61-68.

[12] A.M. Geoffrion, *Relaxation and the dual method in mathematical programming*, Working Paper 135, (1968), Western Management Science Institute, University of California at Los Angeles.

[13] A.M. Geoffrion, *Reducing concave programs with some linear constraints*, SIAM J. Appl. Math., **15** (1967), 653-664.

[14] C.C. Gonzaga, *An algorithm for solving linear programming problems in $O(n^3L)$ operations*, in Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods, N. Megiddo ed., Springer Verlag, New York, 1989, 1-28.

[15] M.D. Grigoriadis, W.F. Walker, *A treatment of transportation problems by primal partition programming*, Management Sci., **14**(9) (1968), 565-599.

[16] L.G. Hacian, *Un algoritm polinomial pentru programarea liniară* (în limba rusă), Doklady Akanemiia Nauk, **244** (1979), 1093-1096.

[17] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Analiză matriceală*, Editura Theta, Bucureşti, 2001.

[18] S. Karlin, *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, Vol. 1, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

[19] H. Karloff, *Linear programming*, Progress in Theoretical Computer Science, Birkäuser, 1991.

[20] N. Karmarkar, *A new polinomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica **4** (1984), 373-395.

[21] L.S. Lasdon, *Teoria optimizării sistemelor mari*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1975.

[22] N. Megiddo, *Pathways to the optimal set in linear programming*, Progress in Matematical Programming, Interior-Point and Related Methods (N. Megiddo, ed.), Springer Verlag, New York, 1989, pp. 131-158.

[23] C.L. Monma, A.J. Morton, *Computational experiments with a dual affine variant of Karmarkar's method for linear programmnig*, Oper. Res. Lett. **6** (1987), 261-267.

[24] R.D.C. Monteiro, I. Adler, *Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming*, Mathematical Programming, **44** (1989), 27-41.

[25] K.G. Murty, *Linear complementarity, linear and nonlinear programming*, Helderman Verlag, 1988.

[26] K.G. Murty, Y. Fathi, *A feasible direction method for linear programming*, Operations Research Letters, **3**(3) (1984), 121-127.

[27] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.

[28] R.G. Parker, R.L. Rardin, *Discrete optimization*, Academic Press Inc., 1988.

[29] A. Ravindran, D.T. Phillips, J.J. Solberg, *Operations research. Principles and practice*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[30] J. Renegar, *A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming*, Mathematical Programming, **40** (1988), 50-94.

[31] K. Ritter, *A decomposition method for linear programming problems with coupling constraints and variables*, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Report 739 (1967).

[32] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[33] J.B. Rosen, *Primal partition programming for block diagonal matrices*, Numerische Mathematik, **6** (1964), 250-260.

[34] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[35] G. Sonnevand, *An "analytic center" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) prgramming*, Proc. 12th IFIP Conf. System Modelling, Budapest, 1985, Lectures Notes in Computer Science, 1986.

[36] A. Ştefănescu, *Curs de cercetări operaţionale*, Tipografia Universităţii Bucureşti, 1989.

[37] A. Ştefănescu, C. Zidăroiu, *Cercetări operaţionale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[38] P.M. Vaidya, *An algorithm for linear programming which requires* $O\Big(\big((m+n)\,n^2+(m+n)^{1.5}\,n\big)\,L\Big)$ *arithmetic operations*, Mathematical Programming **47** (1990), 175-201.

[39] R.J. Vanderbei, J.C. Lagarias, *Dikin's convergence result for the affinesacling algorithm*, Contemporary Mathematics, Mathematical developments arising from linear programming, (J.C. Lagarias and M.J. Todd, eds.), **114** (1990), 109-119.

[40] R.J. Vanderbei, M.S. Meketon, B.A. Freedman, *A modification of Karmarkar's linear programming algorithm*, Algorithmica **1** (1986), 395-307.

[41] H.P. Williams, *Model building in mathematical programming* (Third Edition), John Wiley & Sons Ltd., Chichester - West Sussex, England, 1991.

[42] C. Zidăroiu, *Programare liniară*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

Index

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 1010/2002 la
Tipografia Editurii Universității din București

132 000 lei

ISBN 973-575-720-6

Lei 132000